Пазий Н.Д., Сагадеева М.А.

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

# Содержание

# 1. Комплескные числа

## 1.1. Алгебраическая структура множества комплексных чисел

Выражения вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, называются *комплексными числами*, если для них следующим образом определены понятия равенства и операции сложения и умножения.

(i) Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. В этом случае пишут $z_1 = z_2$.

(ii) *Суммой* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

(iii) *Произведением* комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Иначе говоря, комплексные числа складываются и умножаются как многочлены относительно $i$, но символ $i^2$ заменяется числом -1, т.е. $i = \sqrt{-1}$. По этой причине $i$ иногда называют *мнимой единицей.*

Число $x \in \mathbb{R}$ называется *действительной частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $x = \operatorname{Re} z$. Число $y \in \mathbb{R}$ называется *мнимой частью* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Таким образом, комплексное число $z$ может быть представлено в виде $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z = x + iy$, а вещественное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$.

**Упражнение 1.1.1** Доказать, что $\bar{\bar{z}} = z, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z$.

**Упражнение 1.1.2** Доказать, что $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|$, $-|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|$, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$.

По аналогии с множеством действительных чисел, обозначаемых символом $\mathbb{R}$, множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$. Для выяснения алгебраической структуры

множества $\mathbb{C}$ напомним одно понятие, введенное нами при изучении множества $\mathbb{R}$.

Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$, т.е. либо $\operatorname{Re} z \neq 0$, либо $\operatorname{Im} z \neq 0$. Найдем обратный элемент по умножению к числу $z$, который обозначим символом $z^{-1}$. Поскольку $z \cdot z^{-1} = 1 + i0$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z^{-1} - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z^{-1} = 1, \\ \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z^{-1} - \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z^{-1} = 0. \end{cases}$$

Решая ее относительно $\operatorname{Re} z^{-1}$ и $\operatorname{Im} z^{-1}$, получаем

$$\operatorname{Re} z^{-1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2}, \quad \operatorname{Im} z^{-1} = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

Другими словами,

$$z^{-1} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2} - i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2}. \triangleright$$

**Замечание 1.1.1** В дальнейшем для краткости записи нейтральные элементы $0 + i0$ и $1 + i0$ будем обозначать символами 0 и 1 соответственно. Более того, любое комплексное число вида $x + i0$ будем отождествлять с действительным числом $x$ и тем самым включим множество $\mathbb{R}$ во множество $\mathbb{C}$.

Продолжим изучение множества $\mathbb{C}$ по сравнению с множеством $\mathbb{R}$. Для любых двух различных действительных чисел $x$ и $y$ всегда истинно одно из двух - либо $x > y$, либо $y > x$. Другими словами, множество $\mathbb{R}$ можно линейно упорядочить.

Оказывается, что множество $\mathbb{C}$ *нельзя линейно упорядочить*. Это единственное, но очень существенное различие множеств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Докажем это от противного. Пусть множество $\mathbb{C}$ линейно упорядочено. Поскольку $i \neq 0$, то должно быть либо $i > 0$, либо $i < 0$. Пусть $i > 0$. Умножая обе части неравенства на положительное число $i$, получим $-1 > 0$. Противоречие. Допустим, что $i < 0$. Умножая обе части неравенства на отрицательное число $i$, получим то же самое противоречие.

## 1.2. Геометрическая интерпретация множества комплексных чисел

Между точками плоскости $\mathbb{R}^2$, снабженной системой декартовых координат $(x, y)$, и множеством $\mathbb{C}$ можно установить биекцию следующим образом:

$\forall z \in \mathbb{C}$ поставить в соответствие $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$,

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ поставить в соответствие $x + iy \in \mathbb{C}$.

Поскольку точкам плоскости $\mathbb{R}^2$ можно биективно поставить в соответствие элементы линейного пространства $\mathbb{E}^2$ (в дальнейшем условимся не различать $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{E}^2$), то операции сложения и вычитания комплексных чисел соответствуют операциям сложения и вычитания векторов.

Сопряженному числу $\bar{z}$ будет соответствовать точка $(\operatorname{Re} z, -\operatorname{Im} z)$, симметричная точке $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ относительно оси $Ox$. Модулю числа $z$ соответствует длина вектора $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$.

Для того, чтобы определить умножение в плоскости $\mathbb{R}^2$, удобно перейти к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Другими словами, поставим в соответствие комплексному числу $z \neq 0$ его модуль $|z|$ и угол $\varphi$, отсчитываемый от положительного направления оси $Ox$ в направлении против часовой стрелки и вычисляемый из формул

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Угол $\varphi$ называется *аргументом* комплексного числа $z$ и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значение $argz$, удовлетворяющее условию $-\pi < argz \leq \pi$, называется *главным.* Точка $z = 0$ является *единственной* точкой плоскости $\mathbb{R}^2$, для которой аргумент *не определен.*

Из формул, связывающих декартовы и полярные координаты точки на плоскости, получается *тригонометрическая запись*

$$z \ = \ |z|(\cos argz \ + \ i \sin argz)$$

комплексного числа $z$. Пользуясь этой записью, найдем

$$z_1 \cdot z_2 \ = \ |z_1|(\cos argz_1 \ + \ i \sin argz_1) \cdot$$

$$|z_2|(\cos argz_2 \ + \ i\sin argz_2) \ =$$

$$|z_1 \cdot z_2|(\cos(argz_1 + argz_2) \ + \ i\sin(argz_1 + argz_2)).$$

Отсюда

$$|z_1 z_2| \ = \ |z_1| \cdot |z_2|, \quad argz_1 z_2 = argz_1 + argz_2.$$

На рисунке изображено построение числа $z = z_1 \cdot z_2$.

Чтобы получить $z$, достаточно на отрезке $Oz_1$ как на основании построить треугольник $Oz_1 z_2$, подобный треугольнику $O1z_1$.

**Упражнение 1.2.1** Доказать, что для любых чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| \ = \ \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad arg\frac{z_1}{z_2} \ = \ argz_1 \ - \ argz_2.$$

**Упражнение 1.2.2** Доказать *формулу Муавра*

$$z^n \ = |z|^n \left(\cos n(argz + 2\pi k) + i\sin n(argz + 2\pi k)\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$

Представление множества комплексных чисел в виде точек плоскости $\mathbb{R}^2$ с сохранением алгебраической структуры называется *геометрической интерпретацией* множества комплексных чисел.

В дальнейшем, развивая и продолжая традицию, возникшую в теории действительных чисел, будем называть множество комплексных чисел *комплексной плоскостью.*

**Задачи:**

1.

## 1.3. Множества расширенной комплексной плоскости

Множество комплексных чисел иногда удобно рассматривать в объединении с так называемым *несобственным комплексным числом.* Это число обозначается символом $\infty$ и определяется соотношениями

$$\infty + z = z + \infty = \infty; \quad \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty, \ z \neq 0;$$

$$\infty \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{z}{0} = \infty,\ z \neq 0; |\infty| = +\infty.$$

Такие операции, как $\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$ объявляются лишенными смысла. Понятия действительной и мнимой частей, а также понятие аргумента несобственного комплексного числа также объявляются лишенными смысла. Множество $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называется *расширенным множеством комплексных чисел*, или *расширенной комплексной плоскостью.*

Теперь представим себе комплексную плоскость $\mathbb{C}$ в виде горизонтальной плоскости в трехмерном пространстве и построим сферу $S$, лежащую на этой плоскости и касающуюся ее в точке $z = 0$.

Точку касания обозначим через 0, а диаметрально противоположную точку сферы $S -$ через $N$.

Соединим теперь точку $N$ сферы $S$ прямой линией с точкой $z \in \mathbb{C}$ и обозначим через $M(z)$ точку пересечения этой прямой со сферой, отличную от точки $N$. Легко заметить, что соответствие $z \to M(z)$ является биективным отображением плоскости $\mathbb{C}$ на сферу $S$, проколотую в точке $N$. Добавим к плоскости $\mathbb{C}$ некоторую точку, которую мы назовем *бесконечно удаленной* точкой; поставим в соответствие этой точке несобственное комплексное число $\infty$ и положим $N = M(\infty)$. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется *расширенной комплексной плоскостью.* Биективное отображение расширенной комплексной плоскости на сферу $S$ называется *стереографической проекцией.* Сфера $S$ вместе со стереографической проекцией $M : \overline{\mathbb{C}} \to S$ называется *сферой Римана.*

Здесь мы приведем некоторые основные понятия и результаты, почерпнутые из конечномерного математического анализа, применительно к новой ситуации.

Множество $O^{\delta}_{z_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$ называется *окрестностью* точки $z_0 \in \mathbb{C}$. *Окрестностью* бесконечно удаленной точки называется множество $O^{\delta}_{\infty} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \delta\}$. Из определения видно, что окрестностью точки $z_0 = x_0 + iy_0$ является круг (без окружности) с центром в точке $(x_0, y_0)$ и радиусом $\delta$. Окрестностью бесконечно удаленной точки является внешность круга (с окружностью) радиуса $\delta$ с центром в точке 0.

Пусть множество $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Точку $z_0 \in \Omega$ назовем *внутренней* точкой множества $\Omega$, если

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ (O^{\delta}_{z_0} \subset \Omega);$$

*изолированной* точкой множества $\Omega$, если

$$\exists \delta \in \mathbb{R}_+ \ (O^{\delta}_{z_0} \cap \Omega \ = \ \{z_0\}).$$

Точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ назовем *предельной* точкой множества $\Omega$, если

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \ (O^{\delta}_{z_0} \cap \Omega \setminus \{z_0\} \neq \emptyset).$$

Множество всех предельных точек множества $\Omega$ называется *замыканием* множества $\Omega$ и обозначается $\overline{\Omega}$. Очевидно, $\overline{\Omega} \supset \Omega$. Множество всех внутренних точек множества $\Omega$ называется *внутренностью* этого множества и обозначается $\overset{\circ}{\Omega}$. Очевидно, $\Omega \supset \overset{\circ}{\Omega}$. Множество $\Omega \setminus \overset{\circ}{\Omega} = \partial\Omega$ называется *границей* множества $\Omega$. множество $\Omega$ называется *замкнутым*, если $\Omega = \overline{\Omega}$, и *открытым*, если $\Omega = \overset{\circ}{\Omega}$. Множества $\emptyset$ и $\overline{\mathbb{C}}$ полагаются по определению открытыми и замкнутыми одновременно.

Далее, назовем множество $\Omega$ *связным*, если нельзя найти двух открытых множеств $O_1$ и $O_2$ таких, что

$$\Omega \subset O_1 \cup O_2, \quad \Omega \cap O_1 \cap O_2 \ = \ \emptyset,$$

$$\Omega \cap O_1 \neq \emptyset, \quad \Omega \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Очевидно, что пустое множество и множество, состоящее из одной точки, являются связными.

Мы говорим, что две точки $z, z'$ множества $\Omega$ *можно соединить ломаной*, если существует линия, состоящая из конечного числа отрезков прямых, и целиком лежащая в $\Omega$, причем концами этой линии служат точки $z$ и $z'$. В случае, когда одна из точек является бесконечно удаленной, предполагается, что одно звено ломаной имеет бесконечную длину.

В дальнейшем открытое связное множество будем называть *областью*, а замыкание этого множества — *замкнутой областью*.

**Задачи:**

1. Вычертить область, заданную неравенствами.
4.1 $|z-1| \leq 1, |z+1| > 2$;
4.2 $|z+i| \geq 1, |z| < 2$;
4.3 $|z-i| \leq 2, Rez > 1$;
4.4 $|z+1| \geq 1, |z+i| < 1$;
4.5 $|z+1| < 1, |z-i| \leq 1$;
4.6 $|z+i| \leq 2, |z-i| > 2$;
4.7 $|z-1-i| \leq 1, Imz > 1, Rez \geq 1$;
4.8 $|z-1+i| \geq 1, Rez < 1Imz \leq -1$;
4.9 $|z-2-i| \leq 2, Rez \geq 3, Imz < 1$;
4.10 $|z-1-i| \geq 1, 0 \leq Rez < 2, 0 < Imz \leq 2$;
4.11 $|z+i| < 2, 0 < Rez \leq 1$;
4.12 $|z-i| \leq 1, 0 < argz < \frac{\pi}{4}$;
4.13 $|z-i| \leq 2, 0 < Imz < 2$;
4.14 $|z+i| > 1, -\frac{\pi}{4} \leq argz < 0$;
4.15 $|z-1-i| < 1, |argz| \leq \frac{\pi}{4}$;
4.16 $|z| < 2, -\frac{\pi}{4} \leq arg(z-1) < \frac{\pi}{4}$;
4.17 $|z| \leq 1, arg(z+i) > \frac{\pi}{4}$;
4.18 $1 < |z-1| \leq 2, Imz \geq 0, Rez < 1$;
4.19 $1 \leq |z-i| < 2, Rez \leq 0, Imz > 1$;
4.20 $|z| < 2, Rez \geq 1, argz < -\frac{\pi}{4}$;
4.21 $|z| > 1, -1 < Imz \leq 1, 0 < Rez \leq 2$;
4.22 $|z-1| > 1, -1 \leq Imz < 0, 0 \leq Rez < 3$;
4.23 $|z+i| < 1, -\frac{3\pi}{4} \leq argz \leq -\frac{\pi}{4}$;
4.24 $|z-i| \leq 1, -\frac{\pi}{2} < arg(z-i) < \frac{\pi}{4}$;
4.25 $z\overline{z} < 2, Rez \leq 1, Imz > -1$;
4.26 $z\overline{z} \leq 2, Rez < 1, Imz > -1$;
4.27 $1 < z\overline{z} < 2, Rez > 0, 0 \leq Imz \leq 1$;
4.28 $|z-1| < 1, argz \leq \frac{\pi}{4}, arg(z-1) > \frac{\pi}{4}$;

4.29 $|z-i|<1, arg z \geq \frac{\pi}{4}, arg(z+1-i) \leq \frac{\pi}{4}$;

4.30 $|z-2-i| \geq 1, 1 \leq Re z \leq 3, 0 < Im z \leq 3$;

4.31 $|Re z| \leq 1, |Im z| < 2$.

2. Определить вид кривой

5.1.$z = 3\sec t + i2\operatorname{tg} t$. 5.2.$z = 2\sec t - i3\operatorname{tg} t$. 5.3.$z = -\sec t + i3\operatorname{tg} t$.

5.4.$z = 4\operatorname{tg} t - i3\sec t$. 5.5.$z = 3\operatorname{tg} t + i4\sec t$. 5.6.$z = -4\operatorname{tg} t - i2\sec t$.

5.7.$z = 3\operatorname{cosec} t + i3\operatorname{ctg} t$. 5.8.$z = 4\operatorname{cosec} t - i2\operatorname{ctg} t$. 5.9.$z = \operatorname{ctg} t - i2\operatorname{cosec} t$.

5.10.$z = -\operatorname{ctg} t + i3\operatorname{cosec} t$. 5.11.$z = 3\operatorname{ch} 2t + i2\operatorname{sh} 2t$. 5.12.$z = 2\operatorname{ch} 3t - i3\operatorname{sh} 3t$.

5.13.$z = 5\operatorname{sh} 4t + i4\operatorname{ch} 4t$. 5.14.$z = -4\operatorname{sh} 5t - i5\operatorname{ch} 5t$. 5.15.$z = \dfrac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i4\operatorname{th} 2t$.

5.16.$z = \dfrac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i2\operatorname{th} 4t$. 5.17.$z = \operatorname{th} 5t + \dfrac{5i}{\operatorname{ch} 5t}$. 5.18.$z = \dfrac{1}{\operatorname{sh} t} - i\operatorname{cth} t$.

5.19.$z = 2e^{it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$. 5.20.$z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$. 5.21.$z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}}$.

5.22.$z = 2e^{2it} + \dfrac{1}{2e^{it}}$. 5.23.$z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}$. 5.24.$z = \dfrac{t-1+it}{t(t-1)}$.

5.25.$z = \dfrac{1+t}{1-t} + \dfrac{t}{1-t}(2-4i)$. 5.26.$z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}$. 5.27.$z = t^2+4t+20-i(t^2+4t+4)$.

5.28.$z = t^2+2t+5+i(t^2+2t+1)$. 5.29.$z = 2t^2+2t+1-i(t^2+t+4)$.

5.30.$z = t-2+i(t^2-4t+5)$. 5.31.$z = t^2-2t+3+i(t^2-2t+1)$.

# 2. Функции комплексного переменного

## 2.1. Определение и свойства однолистных элементарных функций

Здесь мы ограничимся рассмотрением линейной функции $w = az + b$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{C}$, и фунции $w = z^{-1}$.

### 2.1.1. Функция w=az+b

Областью определения функции $f(z) = az + b$ является расширенная комплексная плоскость $(f(\infty) = \infty)$ . Каждой точке $z \in \overline{\mathbb{C}}_z$ соответствует только одна точка $w = f(z) \in \overline{\mathbb{C}}_w$, поэтому линейная функция однозначна на области определения.

Поскольку $a \neq 0$, то можно определить обратную функцию

$$f^{-1} \,:\, w \to z \,=\, \frac{1}{a}w \,-\, \frac{b}{a} \,=\, a_1 w \,+\, b_1,$$

которая тоже является линейной, а значит, и однозначной. Поэтому линейная функция однолистна на $\overline{\mathbb{C}}_z$.

Далее, положив $z = x+iy,\ a = \alpha_1+i\alpha_2,\ b = \beta_1+i\beta_2$, получим

$$f(z) \,=\, (\alpha_1 + i\alpha_2)(x + iy) \,+\, (\beta_1 + i\beta_2) \,=$$

$$(\alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1) \,+\, i(\alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2).$$

Функции $\operatorname{Re} f(z) = \alpha_1 x - \alpha_2 y + \beta_1$ и $\operatorname{Im} f(z) = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$ непрерывны, как функции переменных $(x, y)$, поэтому линейная функция непрерывна на $\mathbb{C}_z$.

И, наконец, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z$. Тогда

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,=\, \lim_{z\to z_0} \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} \,=\, a.$$

Значит линейная функция голоморфна на $\mathbb{C}$, т.е. является целой функцией.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

(i) $a = 1$. В этом случае линейная функция $f(z) = z + b$ осуществляет *параллельный перенос* плоскости $\mathbb{C}_z$ на вектор $(\beta_1, \beta_2)$, где $\beta_1 + i\beta_2 = b$.

(ii) $b = 0,\ a \in \mathbb{R}_+$. В этом случае линейная функция $f(z) = az = ax + iay$ осуществляет гомотетию плоскости $\mathbb{C}_z$ с центром в нуле и коэффициентом $a$.

(iii) $b = 0,\ a \in \mathbb{C},\ |a| = 1$. В этом случае $a = \cos\arg a + i\sin\arg a$, поэтому

$$f(z) \;=\; |z|\left(\cos(\arg a + \arg z) \;+\; i\sin(\arg a + \arg z)\right).$$

Значит, в этом случае линейная функция осуществляет поворот плоскости $\mathbb{C}_z$ вокруг точки нуль на угол $\arg a$.

Таким образом, в общем случае линейная функция $f(z) = az + b$ осуществляет поворот на угол $\arg a$, гомотетию с коэффициентом $|a|$ и параллельный перенос на вектор $b$.

**Упражнение 2.1.1** Доказать, что линейная функция переводит прямые в прямые, а окружности в окружности, причем центр окружности переводит в центр окружности.

### 2.1.2. Функция $\mathbf{w=z^{-1}}$

Как и в предыдущем случае отмечаем, что функция $f(z) = z^{-1}$ однозначна и однолистна на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Здесь мы полагаем $f(0) = \infty$ и $f(\infty) = 0$ и замечаем, что $f^{-1} \,:\, w \to z \,=\, w^{-1}$. Поскольку

$$f(z) \;=\; \frac{x}{x^2+y^2} \;-\; i\frac{y}{x^2+y^2},$$

то функция $f$ будет непрерывной в области $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ (называемой также *проколотой плоскостью)*.

Далее, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ . Тогда

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^{-1} - z_0^{-1}}{z - z_0} \;=\; -\lim_{z\to z_0} \frac{1}{zz_0} \;=\; -\frac{1}{z_0^2}.$$

Поэтому функция $f(z) = z^{-1}$ голоморфна в области $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$. Сравнив эту функцию с предыдущей, отмечаем, что перед нами пример однозначной, однолистной, голоморфной, но не целой функции.

Считая главным значением $\arg 1$ нуль, имеем

$$|w| \;=\; |z|^{-1}, \quad \arg w = -\arg z.$$

Полученные соотношения позволяют рассматривать функцию $w = z^{-1}$ как композицию двух отображений — зеркального отображения относительно действительной оси, при котором точка $z$ переходит в точку $\bar{z}$, и инверсии относительно единичной окружности, переводящей точку $\bar{z}$ в точку $z^{-1}$.

Напомним, что *инверсией относительно окружности радиуса* $R$ называется такое преобразование, при котором каждой точке внутри (вне) круга радиуса $R$ ставится точка вне (внутри) круга, лежащая на луче, проведенном из центра круга в данную точку так, что произведение расстояний от этих точек до центра круга равно $R^2$.

**Упражнение 2.1.2** Доказать, что функция $w = z^{-1}$ переводит прямые и окружности в прямые или окружности.

(Указание. Доказать, что уравнение любой прямой или окружности на плоскости в декартовых координатах имеет вид

$$a(x^2 + y^2) \;+\; 2Bx \;+\; 2Cy \;+\; D \;=\; 0,$$

где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, причем $B^2 + C^2 > AD$).

## 2.2. Определение и свойства целых степенной и показательной функций

До сих пор мы рассматривали однозначные, однолистные, голоморфные, но, возможно, не целые функции. Теперь перейдем к рассмотрению однозначных, целых функций, которые не являются однолистными.

### 2.2.1. Целая степенная функция

Функция $f : \overline{\mathbb{C}}_z \to \overline{\mathbb{C}}_w$ вида $f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ f(\infty) = \infty$ называется *целой степенной* функцией.

Из определения сразу следует, что функция $f(z) = z^n$ однозначна на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Полагая $z = x + iy$ и пользуясь биномом Ньютона, получим

$$z^n \;=\; (x + iy)^n \;=$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} - i \sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k C_n^{2k-1} x^{n-2k+1} y^{2k-1}, n = 2m; \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} y^{2k} - i \sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^k C_n^{2k-1} x^{n-2k+1} y^{2k-1}, n = 2m-1. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует непрерывность функции $f(z) = z^n$ на $\mathbb{C}_z$ .

Пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}_z$. Поскольку

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k,$$

то в силу непрерывности функции $f(z) = z^k$ имеем

$$f'(z_0) = n z_0^{n-1}.$$

Итак, функция $f(z) = z^n$ однозначна на $\overline{\mathbb{C}}_z$ и голоморфна на $\mathbb{C}_z$, т.е. является однозначной целой функцией. Однако эта функция однолистной не является. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим область

$$\Omega_z = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b,\ \varphi < \arg z < \psi,\ a, b \in \mathbb{R}_+,$$

$$0 < \psi - \varphi < 2\pi\}.$$

Поскольку $z^n = |z|^n(\cos n \arg z + i \sin n \arg z)$, то при отображении $f : z \to z^n$ область $\Omega_z$ перейдет, очевидно, в область

$$\Omega_w = \{w \in \mathbb{C} : a^n < |w| < b^n,\ n\varphi < \arg w < n\psi\}.$$

Поэтому функция $f(z) = z^n$ отображает любой сектор

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C} : \frac{(2k-1)\pi}{n} < \arg z < \frac{(2k+1)\pi}{n}\}$$

$= 0, 1, ..., n-1$ плоскости $\mathbb{C}_z$ на плоскость $\mathbb{C}_w$, разрезанную по отрицательной части действительной прямой.

Записав обе части равенства $w = z^n$ в тригонометрической форме с учетом того, что $\arg z, \arg w \in (-\pi, \pi)$ получим

$$|w| (\cos(\arg w + 2\pi k) + i \sin(\arg w + 2\pi k)) =$$

$$|z|^n (\cos n(\arg z + 2\pi l) + i \sin n(\arg z + 2\pi l)).$$

Отсюда найдем

$$|z| \;=\; |w|^{\frac{1}{n}}, \quad \arg z = \frac{\arg w + 2\pi k}{n} \;+\; 2\pi m,$$

где $,l,m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, мы построили обратную функцию $z = w^{\frac{1}{n}}$ согласно формуле

$$\begin{aligned} z \;=\; |w|^{\frac{1}{n}} \Big(&\cos(\tfrac{\arg w+2\pi k}{n} + 2\pi m)+ \\ &+i\sin(\tfrac{\arg w+2\pi k}{n} + 2\pi m)\Big)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

причем эта функция, очевидно, многозначна. Однако из (1) видно, что среди значений функции $z = w^{\frac{1}{n}}$ различными являются только $n$, все они располагаются в вершинах правильного $n$-угольника, вписанного в окружность радиуса $|w|^{\frac{1}{n}}$ с центром в точке нуль. Поэтому вместо (1) удобно пользоваться формулой

$$z \;=\; |w|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\frac{\arg w + 2\pi k}{n} \;+\; i\sin\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right), \tag{2}$$

где $=0,1,...,n-1$.

Итак, обратная функция к целой степенной функции является *n-значной* или, как еще говорят, *n-листной.* Однако из (2) следует, что если ограничиться только тем значением функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, которое попадает в некоторый (фиксированный заранее!) сектор $\Omega_k$, то в результате мы получим однозначную функцию. Таким образом, секторы $\Omega_k$ являются областями однолистности функции $w = z^n$ .

### 2.2.2. Целая показательная функция

Функция $f(z) = e^z$, определяемая формулой $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, называется *экспоненциальной функцией*, или *экспонентной.*

Область определения функции $w = e^z$ - вся комплексная плоскость $\mathbb{C}_z$. Представив экспоненту в виде $w = e^x\cos y + ie^x\sin y$, убедимся в ее однозначности, непрерывности и голоморфности в любой точке $z = x + iy$.

Итак, экспонента - целая функция. Отметим некоторые ее свойства. Во-первых,

$$|e^z| \;=\; e^x|\cos y + i\sin y| \;=\; e^x.$$

Значит, $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$. Покажем, что любое значение $w \neq 0$ принимается функцией $e^z$ в некоторой точке $z$, т.е. обораз плоскости $\mathbb{C}_z$ при отображении $w = e^z$ есть $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$. В самом деле, для любого $w \neq 0$ из уравнения $w = e^z$ находим

$$|w| \;=\; e^x, \quad \arg w \;=\; y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда

$$z \;=\; \ln|w| + i(\arg w + 2\pi l), \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Во-вторых, при $y = 0$ $e^z = e^x$. В дальнейшем мы покажем, что экспонента $w = e^z$ единственная функция комплексной переменной, которая совпадает с функцией $e^x$ на действительной прямой. А сейчас мы отметим те свойства функции $w = e^x$, которые однозначно определяют функцию $e^x$.

$$(i)e^0 \;=\; e^0(\cos 0 + i\sin 0) \;=\; 1$$

$$(ii)(e^z)' \;=\; e^x(\cos y + i\sin y) \;=\; e^z,$$

$$(iii)e^{z_1}\cdot e^{z_2} \;=\; e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + isiny_1)\cdot(\cos y_2 + isiny_2) \;=$$

$$e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) \;+\; isin(y_1+y_2)) \;=\; e^{z_1+z_2}.$$

В-третьих, как следует из определения, экспонента является периодической функцией с периодом $2\pi i$. Такого сорта периодические функции нам не раз встретятся в дальнейшем.

И, наконец, из (3) вытекает, что прообразом точки $w \neq 0$ является бесконечное множество точек, различающихся на число, кратное периоду экспоненты. Значит, экспонента не является однолистной функцией. Будем искать области однолистности экспоненты.

Простейшей такой областью является внутренность полосы

$$\Omega_n \;=\; \{z \in \mathbb{C}_z \;:\; \varphi < y < \varphi + h,\; h \in (0, 2\pi)\}.$$

В самом деле, для любых $z_1, z_2 \in \Omega_h,\ z_1 \neq z_2$ имеем

$$|\operatorname{Im}(z_1 - z_2)| < h < 2\pi,$$

т.е. $z_1 - z_2 \neq i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Значит, $e^{z_1} \neq e^{z_2}$. Образом полосы $\Omega_h$ при отображении $w = e^z$ в плоскости $\mathbb{C}_z$ является угол раствора $h$ с вершиной в начале координат, стороны которого образуют с действительной осью углы $\varphi$ и $\varphi + h$.

Значит, если разбить плоскость $\mathbb{C}_z$ полосами

$$\Omega_k = \{z \in \mathbb{C}_z : (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\},\ k \in \mathbb{Z},$$

то каждая из таких полос отобразится функцией $w = e^z$ в плоскость $\mathbb{C}_w$, разрезанную вдоль отрицательной части действительной прямой. Итак, экспонента является *бесконечнолистной* целой функцией.

В заключение отметим,что из определения экспоненты следует *формула Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, в частности, вытекает еще одно представление комплексного числа

$$z = |z|e^{i \arg z} = \rho e^{i\varphi},$$

где $(\rho, \varphi)$ - полярные координаты в плоскости $\mathbb{C}_z$ .

**Упражнение 2.2.1** Доказать, что условия (CR) для функции $f(z) = u(\rho,\varphi) + iv(\rho,\varphi)$ комплексной переменной $z = \rho e^{i\varphi}$ имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

**Упражнение 2.2.2** Доказать, что условия (CR) для функции $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ комплексной переменной $z = x + iy$ имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

## 2.3. Обращение целых степенной и показательной функций

Степенная функция $w = z^n$ в качестве областей однолистности имеет секторы

$$\Omega_k = \left\{ z \in \mathbb{C}_z \,:\, \frac{(2k-1)\pi}{n} < \arg z < \frac{(2k+1)\pi}{n} \right\}$$

$= 0, 1, ..., n-1$. Обратную функцию $z = w^{\frac{1}{n}}$, определенную в $\mathbb{C}_w$ и принимающую значения, лежащие в некотором фиксированном секторе $\Omega_k$, обозначим через $z_k = (w^{\frac{1}{n}})_k$. Из (1) и формулы Эйлера получим

$$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i \arg w}{n} + i\frac{(2k-1)\pi}{n}}, \quad -\pi < \arg w < \pi.$$

Каждая такая функция в области $\mathbb{C}_w$ является однозначной голоморфной функцией, поэтому

$$\frac{dz_k}{dw} = \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{1}{n}\left(w^{\frac{1}{n}-1}\right)_k.$$

Однако рассматривать каждую из величин $z_k$ как отдельную функцию нецелесообразно по той простой причине, что, например, в области

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

обратная функция $z = w^{\frac{1}{n}}$ при $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ совпадает с $z_0$, а при $\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ с $z_1$. Поэтому $z_k$, $k = 0, 1, ..., n-1$ естественно назвать *ветвями* многозначной функции $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Г. Риман первым стал рассматривать многозначные голоморфные функции на некоторых многоместных поверхностях, получивших название *римановых поверхностей*. Чтобы построить такую поверхность для функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, возьмем $n$ одинаковых листов плоскости $\mathbb{C}_w$.Перенумеруем листы от 0 до $n-1$ и расположим горизонтально друг над другом (над -тым листом поместим $+$ 1-ый, $= 0, 1, ...n-2$) так, чтобы прообразы одно и той же точки лежали на одной горизонтали. Разрежем каждый лист вдоль отрицательной части действительной прямой.

При этом каждое число $u_0 \in \mathbb{R}_-$ будет изображаться двумя точками — одной, лежащей на "верхнем берегу" разреза, и другой — на "нижнем берегу". Обозначим через $\mathbb{C}_w^k$ внутренность -того листа. Границей $\mathbb{C}_w^k$ служат оба "берега" разреза. Совершим отождествление или, как еще говорят, "склеивание" верхнего "берега" разреза $\mathbb{C}_w^0$ с нижним "берегом" разреза $\mathbb{C}_w^1$, верхнего "берега" разреза $\mathbb{C}_w^1$ с нижним "берегом" разреза $\mathbb{C}_w^2$,..., верхнего "берега" разреза $\mathbb{C}_w^{n-1}$ с нижним "берегом" разреза $\mathbb{C}_w^0$. Полученная $n$-листная поверхность называется *римановой поверхностью* функции $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Соотношения $w = z^n$ и $z = w^{\frac{1}{n}}$ есть биекции между расширенной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}_w$ и римановой поверхностью функции $z = w^{\frac{1}{n}}$. При обходе вокруг точек $w = 0$ и $w = \infty$ против часовой стрелки (если смотреть "сверху") $m \le n$ раз, исходя из фиксированной точки $w$, при возвращении к этой же точке происходит переход от ветви $z_k$ к ветви $z_{k+m}$, если $k + m < n$, или к ветви $z_{k+m-n}$ , если $k + m \ge n$. Заметим, что при $m = n$ точки $w = 0$ и $w = \infty$ принято называть *алгебраическими точками ветвления порядка* $n - 1$.

Перейдем теперь к обращению показательной функции. Экспонента в качестве областей однолистности имеет полосы

$$\Omega_k \,=\, \{z \in \mathbb{C}_z \,:\, (2k-1)\pi \,<\, \operatorname{Im} z \,<\, (2k+1)\pi\}\,,\ k \in \mathbb{Z}.$$

При отображении $w = e^z$ происходит отображение полосы $\Omega_k$ на плоскость $\mathbb{C}_w$, разрезанную вдоль отрицательной части действительной прямой. Обратная функция

$$z_k \,=\, \ln|w| + i \arg w + i2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ -\pi < \arg w \le \pi,$$

отображает проколотую плоскость $\mathbb{C}_w \setminus \{0\}$ на полосу $\Omega_k$. Поскольку $z_k$—однозначная функция обратная к голоморфной функции $w = e^z$, то мы можем найти ее производную:

$$\frac{dz_k}{dw} \,=\, \frac{1}{(e^z)'} \,=\, \frac{1}{e^z} \,=\, \frac{1}{w}.$$

Отметим, что последнее соотношение не зависит от $k$ , и значит, производные каждой ветви *логарифмической функции*

$$\ln w \,=\, \ln|w| + i(\arg w + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z},$$

совпадают между собой.

Рассматривая бесконечное множество листов ..., $\mathbb{C}_w^{-1}, \mathbb{C}_w^0, \mathbb{C}_w^1, \ldots$, наложенных друг на друга, и склеивая "берега" разрезов $\mathbb{C}_w^k$ и $\mathbb{C}_w^{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$ таким же образом, как при построении римановой поверхности функции $z = w^{\frac{1}{n}}$, получим риманову поверхность функции $z = \ln w$, которая, очевидно, бесконечнолистна. Плоскость $\mathbb{C}_z$ функцией $w = e^z$ биективно отображается на полученную риманову поверхность с выколотой точкой $w = 0$. Так как при обходе вокруг точки $w = 0$ любое число раз все время происходит переход на новые ветви функции $z = \ln w$, то эта точка называется *трансцендентной точкой ветвления.*

## 2.4. Определение и свойства основных тригонометрических функций

Формулами

$$\cos z \;=\; \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z \;=\; \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

определим две основные тригонометрические функции комплексной переменной. Из формулы Эйлера получим, что в случае $\operatorname{Im} z = 0$, функции $w = \cos z$ и $w = \sin z$ совпадают соответственно с хорошо известными функциями косинуса и синуса действительной переменной. В дальнейшем мы покажем, что такое совпадение не случайно.

А сейчас приступим к изучению свойств функций $w = \cos z$ и $w = \sin z$. Во-первых, отметим, что обе функции являются целыми, а во-вторых, что первая из них является четной, а вторая — нечетной. Кроме того, периодом обеих функций являяется число $2\pi$. Действительно, пусть $T$ — период функции $w = \cos z$. Тогда

$$\cos(z + T) \;=\; \cos z$$

и при $z = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + T\right) \;=\; 0.$$

Отсюда следует, что

$$e^{i\frac{\pi}{2}+iT} \;+\; e^{-i\frac{\pi}{2}-iT} \;=\; 0,$$

значит,
$$e^{2i(\frac{\pi}{2}+T)} \;=\; -1,$$
или
$$i(T+\pi) \;=\; \ln|-1| + i\arg(-1) \;=\; i(\pi+2\pi k),\;\; k\in\mathbb{Z}.$$
Поэтому
$$T \;=\; 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

**Упражнение 2.4.1** Показать, что период функции $w=\sin z$ равен $2\pi$.

**Упражнение 2.4.2** Доказать формулы
$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) \;&=\; \cos z_1\cos z_2 \;-\; \sin z_1\sin z_2,\\ \sin(z_1+z_2) \;&=\; \sin z_1\cos z_2 \;+\; \cos z_1\sin z_2.\end{aligned} \tag{1}$$

**Замечание 2.4.1** Формулы (1) являются основными соотношениями, однозначно определяющими косинус и синус как функции действительного переменного.

**Упражнение 2.4.3** Пользуясь формулами (1) получить *формулы приведения*:
$$\cos(z+\frac{\pi}{2}) \;=\; -\sin z, \quad \sin(z+\frac{\pi}{2}) \;=\; \cos z,$$
$$\cos(z+\pi) \;=\; -\cos z, \quad \sin(z+\pi) \;=\; -\sin z.$$

Полагая в первой формуле (1) $z_1=z$ и $z_2=-z$, получим
$$\cos^2 z \;+\; \sin^2 z \;=\; 1. \tag{2}$$
Таким образом, все известные соотношения между косинусом и синусом действительной переменной сохраняются и в комплексной плоскости. Однако из формулы (2) нельзя сделать вывод, что $|\cos z|\le 1$ и $|\sin z|\le 1$, так как $\cos^2 z$ и $\sin^2 z$ не являются, вообще говоря, действительными неотрицательными числами.

Чтобы разобраться в этом вопросе, введем в рассмотрение *гиперболические функции*:
$$\operatorname{ch} z \;=\; \frac{e^z+e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \;=\; \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

(Символы $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ читаются "кохинус зет" и "хинус зет" соответственно). Из определения видно, что при $z = \operatorname{Im} z = x \in \mathbb{R}$ эти функции совпадают с хорошо известными функциями $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

**Упражнение 2.4.4** Доказать формулы:

$$\operatorname{ch} z \ = \ \cos(iz), \quad \operatorname{sh} z \ = \ -i \sin(iz),$$
$$\operatorname{ch}^2 z \ - \ \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

**Упражнение 2.4.5** Доказать формулы:

$$\operatorname{Re} \cos z \ = \ \cos \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z, \ \operatorname{Im} \cos z \ = \ -\sin \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z,$$
$$\operatorname{Re} \sin z \ = \ \sin \operatorname{Re} z \operatorname{ch} \operatorname{Im} z, \ \operatorname{Im} \sin z \ = \ \cos \operatorname{Re} z \operatorname{sh} \operatorname{Im} z.$$

**Упражнение 2.4.6** Пользуясь формулами упражнения 2.4.5, доказать, что

$$\begin{aligned} |\cos z| \ &= \ \sqrt{\operatorname{ch}^2 \operatorname{Im} z \ - \ \sin^2 \operatorname{Re} z}, \\ |\sin z| \ &= \ \sqrt{\operatorname{sh}^2 \operatorname{Im} z \ + \ \sin^2 \operatorname{Re} z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Полагая в формулах (3) $z = x + iy$, получим

$$\operatorname{ch} y \ \geq \ |\cos z| \ \geq \ \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} \ = \ |\operatorname{sh} y|,$$
$$\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1} \ = \ \operatorname{ch} y \ \geq \ |\sin z| \ \geq \ |\operatorname{sh} y|\,.$$

Отсюда заключаем, что при $|y| \to \infty$

$$|\cos z| \ \sim \ \frac{1}{2} e^{|y|}, \quad |\sin z| \ \sim \ \frac{1}{2} e^{|y|}.$$

Следовательно, $|\cos z|$ и $|\sin z|$ принимают сколь угодно большие значения при достаточно больших $|y|$.

**Упражнение 2.4.7** Доказать, что

$$(\cos z)' \ = \ -\sin z, \quad (\sin z)' \ = \ \cos z,$$
$$(\operatorname{ch} z)' \ = : \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{sh} z)' \ = \ \operatorname{ch} z.$$

**Упражнение 2.4.8** Найти периоды и производные следующих функций:

$$\operatorname{tg} z \ = \ \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z \ = \ \frac{\cos z}{\sin z}, \ \operatorname{th} z \ = \ \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \ \operatorname{cth} z \ = \ \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

## 2.5. Обращение основных тригонометрических функций

Определим функцию $z = \arccos w$ как множество решений уравнения

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Разрешая это уравнение относительно $e^{iz}$,

$$e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0.$$

Разрешая полученное уравнение, найдем

$$e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1}.$$

Отсюда

$$z = -i\ln(w + \sqrt{w^2 - 1}).$$

Каждому значению $w \neq \pm 1$ отвечает два различных значения $\sqrt{w^2 - 1}$ и, следовательно, два различных корня, скажем, $\xi_1$ и $\xi_2$, причем $\xi_1 \cdot \xi_2 = 1$. Поэтому множество значений

$$\arccos w = -i\ln(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

является объединением множеств значений $-i\ln\xi_1$ и $-i\ln\xi_2 = -i\ln\xi_1^{-1} = i\ln\xi_1$, т.е.

$$\arccos w = \pm i\ln\xi_1 = \pm i\ln|\xi_1| \pm \arg\xi_1 + 2\pi k.$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{Im}\arccos w = \pm\ln|\xi_1|$, т.е. при $|\xi_1| \neq 1$ все значения $\arccos w$ лежат на паре прямых, параллельных действительной оси, $y = \ln|\xi_1|$ и $y = -\ln|\xi_1|$, а при $|\xi_1| = 1$ эти прямые сливаются в одну действительную ось.

Рассмотрим подробнее случай $w \in [-1, 1]$. Положим $w = \cos\Theta,\ \Theta \in [0, \pi]$, т.е. $\Theta = \arccos w$. Тогда

$$\arccos w = -i\ln(w + \sqrt{w^2 - 1}) = -i\ln(\cos\Theta \pm i\sin\Theta) =$$

$$-i\ln e^{\pm i\Theta} = \pm\Theta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{arccos} w \;=\; \pm \operatorname{arccos} w \;+\; 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z},\; w \in [-1, 1].$$

Другими словами, многозначная функция $z = \operatorname{arccos} w$ с точностью до знака и слагаемого, кратного $2\pi$, совпадает в случае $w \in [-1, 1]$ с хорошо известной функцией арккосинуса действительной переменной.

**Упражнение 2.5.1** Получить формулу

$$\arcsin w \;=\; i \ln(iw \;+\; \sqrt{1 - w^2})$$

и показать, что для любого $w \in \mathbb{C}_w$ существуют значения $\operatorname{arccos} w$ и $\arcsin w$, сумма которых равна $\dfrac{\pi}{2}$.

**Упражнение 2.5.2** Найти формулы

$$\operatorname{arsh} w \;=\; \ln(w \;+\; \sqrt{w^2 + 1}),\; \operatorname{arch} w \;=\; \ln(w \;+\; \sqrt{w^2 - 1}).$$

**Упражнение 2.5.3** Найти производные любой ветви функций:

$$\operatorname{arccos} w, \arcsin w, \operatorname{arch} w, \operatorname{arsh} w.$$

Теперь определим функцию $z = \operatorname{arctg} w$ как множество решений уравнения

$$w \;=\; \operatorname{tg} z \;=\; \frac{1}{i}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}.$$

Или, другими словами,

$$e^{2iz} \;=\; \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

Отсюда находим

$$z \;=\; \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iw}{1 - iw} \;=\; \operatorname{arctg} w.$$

Итак, функция $z = \operatorname{arctg} w$ оказалась бесконечнозначной, определенной при всех $z = \pm i$ и выражаемой через лонарифм от функции

$$\eta \;=\; \frac{iw + 1}{-iw + 1}.$$

Эта функция биективно отображает $\overline{\mathbb{C}}_w$ на $\overline{\mathbb{C}}_\eta$ так, что точки $w = i$ и $w = -i$ переходят в точки $\eta = 0$ и $\eta = \infty$ соответственно, разрез вдоль мнимой оси в $\overline{\mathbb{C}}_w$ по отрезку $[-i, i]$ переходит в разрез вдоль положительной части действительной оси в $\overline{\mathbb{C}}_\eta$. В плоскости $\mathbb{C}_\eta$ с разрезом можно выделить однозначные ветви лонарифма, скажем,

$$\ln_k \eta \;=\; \ln|\eta| \;+\; i\arg\eta \;+\; i2\pi k,\;\; k\in\mathbb{Z},$$

которым соответствуют однозначные голоморфные ветви функции

$$\mathrm{arctg}_k w \;=\; \frac{1}{2i}\ln\mid\frac{1+iw}{1-iw}\mid\; + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right) \;+\; k\pi,\;\; k\in\mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что любые две ветви функции $z = \mathrm{arctg}\, w$ отличаются на действительное число, кратное $\pi$.

В частности, при $w = \mathrm{Re}\, w = u \in \mathbb{R}$ получим

$$\left|\frac{1+iu}{1-iu}\right| \;=\; 1, \quad \arg\left(\frac{1+iu}{1-iu}\right) \;=\; 2\arg(1+iu) \;=$$

$$2\,\mathrm{arctg}\, u.$$

Поэтому

$$\mathrm{arctg}_k w \;=\; \mathrm{arctg}\, u \;+\; \pi k.$$

**Упражнение 2.5.4** Получить и исследовать формулы:

$$\mathrm{arcctg}\, w \;=\; \frac{1}{2i}\ln\frac{w+1}{w-1}, \quad \mathrm{arth}\, w \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{1+w}{1-w},$$

$$\mathrm{arcth}\, w \;=\; \frac{1}{2}\ln\frac{w+1}{w-1}.$$

**Упражнение 2.5.5** Найти производные любой ветви функций

$$\mathrm{arctg}\, w,\; \mathrm{arcctg}\, w,\; \mathrm{arth}\, w,\; \mathrm{arcth}\, w.$$

## 2.6. Общие степенная и показательная функции

*Общая степенная функция* $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число, определяется соотношением

$$z^a = e^{a \ln z} = e^{a \ln |z|} \cdot e^{ia(\arg z + 2\pi k)}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Полагая здесь $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, получим

$$\ln z = \ln \rho + i\varphi + i2\pi k,$$

и, следовательно,

$$z^a = e^{\alpha \ln \rho - \beta(\varphi + 2\pi k)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi + 2\pi k) + \beta \ln \rho)}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда видно, что при $\beta \neq 0$ функция $w = z^a$ всегда имеет бесконечно много значений, лежащих на окружностях $|w| = r_k$ с радиусами

$$r_k = e^{\alpha \ln \rho - \beta \varphi} \cdot e^{-2\beta \pi k},$$

образующими бесконечную в обе стороны геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-2\beta\pi}$. Аргументы этих значений

$$\Theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln \rho + 2\alpha\pi k$$

образуют бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $2\alpha\pi$.

При $\beta = 0$, т.е. при действительных значениях $a$, значения $z^a$ располагаются на одной окружности

$$|w| = e^{\alpha \ln \rho} = |z|^a,$$

а их аргументы находятся по формулам

$$\Theta_k = \varphi + 2\pi a k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $a = \frac{p}{q}$ — рациональное число (считаем дробь $\frac{p}{q}$ несократимой), то все значения $\Theta_k$ отличаются на число кратное $2\pi a$. Следовательно, в этом случае функция $w = z^a$ конечнозначная и совпадает с функцией $w = z^{\frac{p}{q}}$. Если же $a$ — иррациональное число, то все значения $\Theta_k$ отличаются друг от друга и, следовательно, функция $w = z^a$ бесконечнозначна. Многозначность

общей степенной функции обусловлена многозначностью логарифма. Точками ветвления для нее будут точки 0 и $\infty$. Но теперь это трансцендентные точки ветвления.

*Общая показательная функция* $w = a^z$, $a \in \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ определяется формулой

$$a^z \;=\; e^{z \ln a} \;=\; e^{z \ln |a|} \cdot e^{iz(\arg a + 2\pi k)}, \; k \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}_z.$$

Чтобы получить определенную однозначную ветвь этой многозначной функции, достаточно фиксировать одно из значений $\ln a = b$. В этом случае мы получаем однозначную голоморфную функцию $e^z$. Беря все возможные зачения $\ln a$, получаем все возможные однозначные ветви функции $w = a^z$. Так как два значения $\ln a$ различаются слагаемыми вида $i2\pi k$, то две ветви функции $w = a^z$ будут различаться сомножителем вида $e^{iz2\pi k}$, представляющим голоморфную функцию.

Поэтому в рассматриваемом случае ветви многозначной функции $w = a^z$ будут существенно отличаться по своему характеру от ветвей всех ранее рассмотренных многозначных функций. А именно, во всех рассмотренных ранее случаях существовали точки ветвления. Здесь же эта возможность исключена потому, что каждая ветвь представляет функцию однолистную и однозначную во всей комплексной плоскости. По какой бы замкнутой кривой мы не двигались бы, по возвращении в исходную точку получим то же самое исходное число.

Таким образом, многозначная функция $w = a^z$ *не имеет ни одной точки ветвления*, и ее однозначные непрерывные ветви не могут непрерывно переходить одна в другую. Все это позволяет смотреть на них как на самостоятельные, не связанные друг с другом однозначные голоморфные функции

$$e^{z \ln a}, e^{z(\ln a + 2\pi i)}, ..., e^{z(\ln a + 2k\pi i)}.$$

То обстоятельство, что функция $w = a^z$ представляет собой совокупность отдельных, не связанных между собой однозначных функций, имеет для нас не большее значение, чем тот факт, например, что функции $w = \sin z$ и $w = -\sin z$ можно рассматривать как ветви двузначной функции $w = \sqrt{1 - \cos^2 z}$. Более

существенным для нас является тот факт, что для общей показательной функции уже *не справедливо* правило сложения показателей при умножении, т.е.

$$a^{z_1} \cdot a^{z_2} \neq a^{z_1+z_2}.$$

Действительно,

$$a^{z_1} \cdot a^{z_2} \;=\; e^{z_1 \ln a} \cdot e^{z_2 \ln a} \;=$$

$$e^{z_1(\ln|a|+i\arg a+2k\pi i)} \cdot e^{z_2(\ln|a|+i\arg a+2l\pi i)} \;=$$

$$e^{(z_1+z_2)(\ln|a|+i\arg a)} \cdot e^{2\pi i(kz_1+lz_2)}.$$

С другой стороны,

$$a^{z_1+z_2} e^{(z_1+z_2)\ln a} \;=\; e^{(z_1+z_2)(\ln|a|+i\arg a)} \cdot e^{(z_1+z_2)2\pi ik}.$$

К примеру, множество значений $\varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}$ состоит из двух чисел $\varphi$ и $-\varphi$, что не совпадает с множеством значений $\varphi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, состоящим из одного числа $\varphi$.

Фиксировав одну из ветвей $w = e^{bz},\ b = \ln a$ функции $w = a^z$, мы можем рассмотреть функцию, обратную по отношению к этой ветви. Получим, очевидно,

$$z = b^{-1} \ln w.$$

Эта функция отличается от функции $z = \ln w$ только постоянным множителем $b^{-1}$. Поскольку $b = \ln a$, то можно определить *логарифм по основанию* $a$:

$$\log_a w \;=\; \frac{\ln w}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Задачи:**

1. Представить в алгебраической форме.

   2.1. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$

   2.2. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right)$

   2.3. $Ln\, 6$

2.4. $\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi i}{4}\right)$

2.5. $\operatorname{ch}\left(2+\frac{\pi i}{2}\right)$

2.6. $Ln\,(1+i)$

2.7. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$

2.8. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$

2.9. $Ln\,(\sqrt{3}+i)$

2.10. $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi i}{2}\right)$

2.11. $\operatorname{ch}(1-\pi i)$

2.12. $Ln\,(1+\sqrt{3}i)$

2.13. $Ln\,(-1+i)$

2.14. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-2i\right)$

2.15. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$

2.16. $\operatorname{sh}\left(3+\frac{\pi i}{6}\right)$

2.17. $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{3}\right)$

2.18. $Ln\,(-1-i)$

2.19. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-3i\right)$

2.20. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$

2.21. $Ln\,(1-i)$

2.22. $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)$

2.23. $\operatorname{ch}\left(2-\frac{\pi i}{6}\right)$

2.24. $1^{2i}$

2.25. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$

2.26. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$

2.27. $i^{3i}$

2.28. $\operatorname{sh}(2-\pi i)$

2.29. $(-i)^{5i}$

2.30. $(-1)^{4i}$

2.31. $\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$

2. Представить в алгебраической форме.

3.1 $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$

3.2 $\arcsin 4$

3.3 $\mathrm{arch}(-2)$

3.4 $\mathrm{arctg}(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3})$

3.5 $\mathrm{arcth}(\frac{3-4i}{5})$

3.6 $\mathrm{arcctg}(\frac{4+3i}{5})$

3.7 $\mathrm{arth}(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3})$

3.8 $\cos(\frac{\pi}{2}-i)$

3.9 $\mathrm{sh}(1-\frac{\pi}{2}i)$

3.10 $(-1-i)^{4i}$

3.11 $\sin(\frac{\pi}{4}+i)$

3.12 $\mathrm{arch}(3i)$

3.13 $\mathrm{arctg}(\frac{3+4i}{5})$

3.14 $\mathrm{arcth}(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7})$

3.15 $\mathrm{arctg}(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7})$

3.16 $\mathrm{arth}(\frac{4-3i}{5})$

3.17 $\mathrm{arctg}(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7})$

3.18 $\mathrm{arcth}(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7})$

3.19 $\arccos(-5)$

3.20 $\mathrm{arsh}(-4i)$

3.21 $(-\sqrt{3}+i)^{6i}$

3.22 $\omega=\sin\frac{i}{z}$ при $z=\frac{8+2\pi u}{\pi^2+16}$

3.23 $\omega=e^{\frac{i}{z}}$ при $z=\frac{4+2\pi u}{\pi^2+4}$

3.24 $\mathrm{arcctg}(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7})$

3.25 $\mathrm{arth}(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7})$

3.26 $\mathrm{arcth}(\frac{4+3i}{5})$

3.27 $\omega = \mathrm{ch} iz$ при $z = \frac{\pi}{4} + 2i$

3.28 $\mathrm{arctg}(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7})$

3.29 $\arccos(-3i)$

3.30 $(4-3i)^i$

3.31 $(-12+5i)^i$

# 3. Дифференцирование функций комплесного переменного

## 3.1. Производная функций комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}_z$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{1}$$

то он называется *производной* от функции $f$ в точке $z_0$ и обозначается $f'(z_0)$. (Иногда функция $f$, имеющая производную в точке $z_0$, называется *моногенной.*)

**Пример 3.1.1** Функция $w = |z|z$ дифференцируема в точке нуль. Действительно,

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|z - 0}{z - 0} = \lim_{z \to 0} |z| = 0.$$

Обратим внимание, что существование и величина предела в (1) должны *не зависеть* от способа стремления $z \to z_0$. Для подтверждения этого приведем следующий

**Пример 3.1.2** Функция $w = \operatorname{Re} z$ нигде не дифференцируема . Действительно, пусть $z_0 = x_0 + iy_0$, а $z = x + iy_0$, тогда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

С другой стороны, пусть $z = x_0 + iy$, тогда

$$\lim_{z \to z_0} \frac{x_0 - x_0}{iy} = 0.$$

Полагая $\nabla f = f(z) - f(z_0)$ и $\nabla z = z - z_0$, запишем (1) так:

$$\frac{\nabla f}{\nabla z} = f'(z_0) + \alpha(z_0, \nabla z),$$

где $\alpha(z_0, \nabla z) \to 0$, при $\nabla z \to 0$. Отсюда вытекает, что приращение $\nabla f$ моногенной функции $f$ может быть представлено в виде

$$\nabla f \;=\; A\nabla z \;+\; \alpha(z_0, \nabla z)\nabla z, \tag{2}$$

где $A$ не зависит от $\nabla z$ и $\alpha(z_0, \nabla z) \to 0$ при $\nabla z \to 0$. Верно также и обратное - всякая функция $f$, приращение $\nabla f$ которой может быть представлено в виде (2), является моногенной и ее производная равна $A$. Таким образом, представление (2) является *необходимым* и *достаточным* условием моногенности функции $f$ в точке $z_0$.

**Упражнение 3.1.1** Доказать, что всякая дифференцируема я в точке $z_0$ функция $f$ непрерывна в этой точке.

**Упражнение 3.1.2** Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $z$. Доказать, что их сумма, произведение и частное являются дифференцируемыми функциями в этой точке, причем

$$(i)\, (f+g)'\,(z) \;=\; f'(z) + g'(z),$$

$$(ii)\, (fg)'\,(z) \;=\; f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

$$(iii)\, \left(\frac{f}{g}\right)'(z) \;=\; \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0.$$

**Упражнение 3.1.3** Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $z$, а функция $\varphi$ дифференцируема в точке $w = f(z)$. Доказать, что композиция $\varphi \circ f$ дифференцируема в точке $z$, причем

$$(\varphi \circ f)'\,(z) \;=\; \varphi'(w) \cdot f'(z).$$

**Упражнение 3.1.4** Пусть функция $f : \Omega_z \to \Omega_w$ биективна, а обратная функция $\varphi = f^{-1} \;:\; \Omega_w \to \Omega_z$ непрерывна на $\Omega_z$. Доказать, что если функция $f$ дифференцируема в точке $z \in \Omega_z$ и $f'(z) \neq 0$, то функция $\varphi$ дифференцируема в точке $w = f(z)$, причем

$$\varphi^{-1}(w) \;=\; \frac{1}{f'(z)}.$$

**Теорема 3.1.1** *Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, определенная в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, дифференцируема в этой точке точно тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x_0, y_0)$, и их частные производные удовлетворяют условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{CR}$$

Условия (CR) называются *условиями Коши — Римана* и играют важнейшую роль в анализе функций комплексной переменной.

**Замечание 3.1.1** *Пусть функция $f$ дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Тогда*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{3}$$

*А если учесть еще условия (CR), то из (3) получим*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),$$

*и*

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

**Замечание 3.1.2** Из конечномерного анализа известно, что для дифференцируемости функций $u$ и $v$ достаточно существования и непрерывности их частных производных. Поэтому для моногенности функции $f = u + iv$ достаточно, чтобы частные производные функций $u$ и $v$ существовали, были непрерывны и удовлетворяли условиям (CR).

**Пример 3.1.3** Функция $w = \bar{z}$ нигде не дифференцируема , поскольку

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} \bar{z}}{\partial y} = -1\,,$$

т.е. условия (CR) нарушены.

## 3.2. Голоморфность функции комплексной переменной

Пусть функция $f : \Omega_z \to \overline{\mathbb{C}}_w$ определена в некоторой области $\Omega_z \subset \mathbb{C}_z$.

Функция $f : \Omega_z \to \overline{\mathbb{C}}_w$ называется *голоморфной в точке* $z_0 \in \Omega_z$, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки $z_0$. Функция $f$ называется *голоморфной в области* $\Omega'{}_z \subset \Omega z$, если она голоморфна в каждой точке этой области. Голоморфная в каждой точке плоскости $\mathbb{C}_z$ функция называется *целой*.

**Пример 3.2.1** Функция $w = z^2$ является целой. Действительно, пусть точка $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

**Пример 3.2.2** Функция $w = |z|z$ нигде не голоморфна. Действительно,

$$w = \sqrt{x^2 + y^2}(x + iy),$$

поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Стало быть, условия (CR) не выполняются ни в одной точке $z \neq 0$. С другой стороны, в примере 3.1.1 показана моногенность этой функции в точке $z = 0$.

Как следует из определения, голоморфная функция обладает всеми свойствами моногенной функции. Кроме того, голоморфная функция обладает целым рядом замечательных свойств, решительно отличающих ее от дифференцируемых функций. Одним из основных отличий является тот факт, что производная любой голоморфной функции будет тоже голоморфной функцией, причем с той же областью голоморфности, что и исходная функция. Другими словами, голоморфная функция оказывается “бесконечно $\mathbb{C}$-дифференцируемой”. Однако доказательство

этого факта требует развитой теории, и поэтому мы проведем его позднее. А сейчас рассмотрим только одно, но тоже весьма необычное свойство голоморфной функции.

Функция $f\ :\ \Omega_z \to \overline{\mathbb{C}}_w$ называется *однолистной в области* $\Omega'_z \subset \Omega_z$, если она инъективна в этой области. Область $\Omega'_z$, в которой функция $f$ однолистна, называется *областью однолистности* функции $f$.

**Теорема 3.2.1** *Пусть функция $f\ :\ \Omega_z \to \mathbb{C}_w$ голоморфна в некоторой области $\Omega_z \subset \mathbb{C}_w$. Пусть существует точка $z_0 \in \Omega_z$, в которой $f'(z_0) \neq 0$. Тогда:*

*(i) существует окрестность точки $z_0$, в которой функция $f$ однолистна;*

*(ii) существует окрестность точки $w_0 = f(z_0)$, на которой определена однолистная обратная функция $z = f^{-1}(w)$;*

*(iii) функция $f^{-1}$ голоморфна в точке $w_0$.*

Доказанная теорема вовсе не означает, что если $f'(z) \neq 0$ при любом $z \in \Omega_z$, то существует обратная голоморфная функция $f^{-1}\ :\ f[\Omega_z] \to \Omega_z$.

**Пример 3.2.3** Функция $w = z^2$ голоморфна в области

$$\Omega_z \ = \ \left\{ z \in \mathbb{C}\ :\ 1 < |z| < 2,\ 0 < argz < \frac{3\pi}{2} \right\},$$

и в ней $w' = 2z \neq 0$. Однако эта функция область $\Omega_z$ отображает на кольцо

$$\Omega_z \ = \ \{w \in \mathbb{C}\ :\ 1 < |w| < 4\},$$

каждая точка верхней половины которого имеет два прообраза.

**Задачи:**

1. Восстановить аналитическую в окрестности точки $z_0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ и значению $f(z_0)$

   6.1. $u = x^2 - y^2 + x, f(0) = 0$

   6.2. $u = x^3 - 3xy + 1, f(0) = 1$

6.3. $v = e^x(y\cos y + x\sin y), f(0) = 0$

6.4. $u = x^2 - y^2 - 2y, f(0) = 0$

6.5. $u = \frac{e^{2x}+1}{e^x}, f(0) = 2$

6.6. $u = \frac{x}{x^2+y^2}, f(1) = 1 + i$

6.7. $v = e^{-y}\sin x + y, f(0) = 1$

6.8. $v = e^x \cos y, f(0) = 1 + i$

6.9. $v = \frac{y}{(x+1)^2+y^2}, f(0) = 1$

6.10. $v = y - \frac{y}{x^2+y^2}, f(1) = 2$

6.11. $u = e^{-y}\cos x, f(0) = 1$

6.12. $u = y - 2xy, f(0) = 0$

6.13. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i$

6.14. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1$

6.15. $v = 3x^2y - y^3 - y, f(0) = 0$

6.16. $v = 2xy + y, f(0) = 0$

6.17. $v = 3x^2y - y^3, f(0) = 1$

6.18. $u = e^x(x\cos y - y\sin y), f(0) = 0$

6.19. $v = 2xy + 2x, f(0) = 0$

6.20. $u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i$

6.21. $v = \frac{e^{2x}-1}{e^x}\sin y, f(0) = 2$

6.22. $v = 1 - \frac{y}{x^2+y^2}, f(1) = 1 + i$

6.23. $u = e^{-y}\cos x + x, f(0) = 1$

6.24. $v = e^{-y}\sin x, f(0) = 1$

6.25. $u = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}, f(0) = 1$

6.26. $u = \frac{x}{x^2+y^2} + x, f(1) = 2$

6.27. $v = x^2 - y^2 - x, f(0) = 0$

6.28. $u = -2xy - 2y, f(0) = i$

6.29. $v = 2xy - 2y, f(0) = 1$

6.30. $u = x^3 - 3xy^2 - x, f(0) = 0$

6.31. $v = 2xy + x, f(0) = 0$

# 4. Конформные отображения

## 4.1. Определение конформного отображения

Рассмотрим функцию $w = f(z)$, голоморфную в некоторой области $\Omega_z$. Выберем какую-либо точку $z_0 \in \Omega_z$ и проведем через нее произвольную гладкую кривую $\gamma_1$, целиком лежащую в $\Omega_z$ . Функция $f$ отображает область $\Omega_z$ в область $\Omega_w$, точку $z_0$ в точку $w_0$; кривую $\gamma_1$ в кривую $\Gamma_1$, причем $\Gamma_1$ - гладкая кривая, проходящая через точку $w_0$ . По условию существует ${f'}_{z_0}$. Предположим, что ${f'}_{z_0} \neq 0$ , и представим ${f'}_{z_0}$ в показательной форме

$$
{f'}_{z_0} \, = \, \lim_{\nabla z \to 0} \frac{\nabla w}{\nabla z} \, = \, k e^{i\alpha}. \tag{1}
$$

Выберем такой способ стремления $\nabla z$ к нулю, при котором точки $z = z_0 + \nabla z$ лежат на кривой $\gamma_1$. Очевидно, соответствующие им точки $w_0 + \nabla w$ лежат на кривой $\Gamma_1$. Заметим, что $\arg \nabla z$ и $\arg \nabla w$ имеют геометрический смысл углов соответствующих векторов с положительными направлениями осей $Ox$ и $Ou$, а $|\nabla z|$ и $|\nabla w|$ представляют собой длины этих векторов. При $\nabla z \to 0$ из (1) следует, что

$$
\alpha \, = \, \arg {f'}_{z_0} \, = \, \lim_{\nabla z \to 0} \arg \frac{\nabla w}{\nabla z} =
$$

$$
= \lim_{\nabla z \to 0} \arg \nabla w \, - \, \lim_{\nabla z \to 0} \arg \nabla z \, = \, \Theta - \varphi,
$$

т.е. аргумент $\alpha$ производной имеет геометрический смысл разности угла $\Theta_1$ вектора касательной к кривой $\Gamma_1$ в точке $w_0$ с осью $Ou$ и угла $\varphi_1$ вектора касательной к кривой $\gamma_1$ в точке $z_0$ с осью $Ox$.

Поскольку производная ${f'}_{z_0}$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же и для любой другой кривой, проходящей через точку $z_0$ ( хотя значения самих углов $\Theta_1$ и $\varphi_1$ могут измениться). Отсюда следует, что при отображении голоморфной функции, удовлетворяющей условию ${f'}_{z_0} \neq 0$, угол $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ между любыми кривыми $\gamma_2$ и $\gamma_1$, пересекающимися в точке $z_0$, равен углу $\Theta = \Theta_2 - \Theta_1$ между их образами $\Gamma_2$ и $\Gamma_1$, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$. Заметим, что

при этом сохраняется не только абсолютная величина углов, но и направление их отсчета. Это свойство называется *свойством сохранения углов.*

Аналогично из соотношения (1) получим

$$K \ = | \ f'_{z_0} \ | = \lim_{\nabla z \to 0} \frac{|\nabla w|}{|\nabla z|}.$$

То есть с точностью до бесконечно малой величины имеет место равенство $|\nabla w| = k|\nabla z|$ . Заметим, что и это соотношение не зависит от выбора кривой $\gamma$ . Геометрический смысл этого соотношения состоит в том, что при отображении голоморфной функцией $f$ , удовлетворяющей условию $f'_{z_0} \neq 0$, бесконечно малые линейные элементы преобразуются подобным образом, причем $| \ f'_{z_0} \ |$ определяет коэффициент подобия. Это свойство носит название *свойства постоянного растяжения.*

Биективное непрерывное отображение $f \ : \ \Omega_z \to \Omega_w$ называется *конформным*, если оно во всех точках $z \in \Omega_z$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.

Из этого определения и предыдущих рассмотрений непосредственно следует

**Теорема 4.1.1** *Пусть функция $f$ голоморфна и однолистна в области $\Omega_z$ , причем $f'_z \neq 0 \quad \forall z \in \Omega_z$ . Тогда функция $f$ конформно отображает область $\Omega_z$ на область $\Omega_w = f[\Omega_z]$.*

Сформулируем обращение теоремы 4.1.1.

**Теорема 4.1.2** *Пусть функция $f$ конформно отображает область $\Omega_z$ на $\Omega_w$ и частные производные функций $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$ непрерывны и уловлетворяют условиям (CR) на $\Omega_z$. Тогда функция $f$ голоморфна и однолистна на $\Omega_z$, причем $f'_z \neq 0 \ \ \forall z \in \Omega_z$.*

$\lhd$ Однолистность имеет место в силу конформности (т.е. биективности) отображения $f$. Голоморфность $f$ имеет место в силу теоремы 3.1.1 и определения **??**. Осталось показать, что $f'_z \neq 0 \ \forall z \in \Omega_z$ . Ввиду конформности $f$ для любых точек $z_1$ и $z_2$ из окрестности некоторой точки $z_0 \in \Omega_z$ имеют место соотношения

$$\arg \nabla z_2 \ - \ \arg \nabla z_1 \ = \ \arg \nabla w_2 \ - \ \arg \nabla w_1 \qquad (2)$$

и
$$\left|\frac{\nabla w_2}{\nabla z_2}\right| = \left|\frac{\nabla w_1}{\nabla z_1}\right| = k > 0 \tag{3}$$
с точностью до бесконечно малой. Здесь $\nabla z_k = z_k - z_0$ ($\nabla w_k = w_k - w_0$), $k = 1, 2$ - векторы, выходящие из точки $z_0$ ($w_0 = f(z_0)$).

Обозначив через $\alpha = \arg \dfrac{\nabla w_2}{\nabla z_2}$, получим, что $\alpha = \arg \dfrac{\nabla w_1}{\nabla z_1}$. Действительно,
$$\arg \frac{\nabla w_2}{\nabla z_2} = \arg \nabla w_2 - \arg \nabla z_2 = \arg \nabla w_1 - \arg \nabla z_1 = \arg \frac{\nabla w_1}{\nabla z_1}.$$
Из (2), (3) получим, что с точностью до бесконечно малых величин имеет место соотношение
$$\frac{\nabla w_2}{\nabla z_2} = \frac{\nabla w_1}{\nabla z_1} = ke^{i\alpha}. \tag{4}$$
В силу произвола в выборе точек $z_1$ и $z_2$ в окрестность точки $z_0$ соотношение (4) означает, что существует предел отношения $\dfrac{\nabla w}{\nabla z}$ при $\nabla z \to 0$. Этот предел по определению является производной функции $f$ в точке $z_0$. Так как $k > 0$, то эта производная отлична от нуля. $\triangleright$

Как было замечено выше, при отображении голоморфной функцией $f$ сохраняется не только абсолютная величина углов, но и направление их отсчета. Конформные отображения, при которых абсолютные величины углов сохраняются, но направление их отсчета меняется на противоположное, называются *конформными отображениями второго рода* в отличие от *конформных отображений первого рода*, которые сохраняют не только углы, но и направление их отсчета.

Нетрудно показать, что конформное отображение второго рода осуществляется функциями, комплексно сопряженными функциям с отличной от нуля производной. Действительно, пусть $w = f(z)$ есть конформное отображение второго рода области $\Omega_z$ на область $\Omega_w$. Рассмотрим функцию $w^* = \bar{w}$, отображающую $\Omega_w$ на $\Omega_{w^*}$ . Геометрический смысл последнего отображения заключается в зеркальном отображении области $\Omega_w$ относительно оси $Ox$ плоскости $\mathbb{C}_w$. Но при зеркальном отображении направление

отсчета всех углов меняется на противоположное при сохранении их абсолютной величины. Это означает, что отображение области $\Omega_z$ на $\Omega_{w^*}$ функцией $w = \overline{f(z)}$ является конформным отображением первого рода. Тем самым функция $\varphi(z)$ должна быть голоморфной в области $\Omega_z$ и ${\varphi'}_z \neq 0$.

До сих пор неявно предполагалось, что конформно отображаемая область $\Omega_z$ отображается в область $\Omega_w$, не содержащую бесконечно удаленной точки. Рассмотрим теперь отображение окрестности некой точки $z_0$ на окрестность точки $\infty$ так, что $z_0 \to \infty$. Будем называть данное отображение конформным, если окрестность точки $z_0$ конформно отображается на окрестность точки $\xi = 0$, где $\xi = \frac{1}{w}$.

**Пример 4.1.1** Линейная функция $f(z) = az + b$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$ . Действительно, она однолистна, и ее производная ${f'}_z = a$ отлична от нуля в любой точке $z \in \mathbb{C}_z$ . Чтобы убедиться в сохранении конформности отображения окрестности точки $\infty$ на окрестность точки $\infty$, положим $\eta = \frac{1}{z}$ и $w = \frac{1}{\xi}$. Функция $w = az + b$ перейдет в функцию $\xi = \dfrac{\eta}{(a + b\eta)}$, которая конформно отображает окрестность точки 0 на окрестность точки 0. (Действительно, функция $\xi = \dfrac{\eta}{(a + b\eta)}$ голоморфна и однолистна в этой окрестности, причем

$$\frac{d\xi}{d\eta}(0) \; = \; \frac{1}{a} \; \neq \; 0).$$

**Пример 4.1.2** Степенная функция $f(z) = z^n, \;\; n > 1$ конформно отображает область однолистности — сектор

$$\varphi_0 \; < \; \arg z \; < \; \varphi_0 \; + \; \frac{2\pi}{n}$$

на расширенную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$, разрезанную вдоль луча $\arg w = \varphi_0$, поскольку ее производная ${f'}_z = nz^{n-1}$ отлична от нуля и ограничена всюду внутри данного сектора и в точках его границы за исключением точек 0 и $\infty$. Нарушение конформности в точке 0 нетрудно показать непосредственно. Действительно, рассмотрим дуги $\gamma_1$ и $\gamma_2$ , пересекающиеся в точке 0 под углом $\psi_0$.

Функцией $w = z^n$ эти дуги переводятся в дуги $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ , пересекающиеся в точке 0 под углом $\Psi_0 = n\psi_0 \neq \psi_0$.

**Пример 4.1.3** Экспонента $f(z) = e^z$ конформно отображает область однолистности — полосу $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ плоскости $\mathbb{C}_z$ на плоскость $\mathbb{C}_w$, разрезанную по лучу $\arg w = y_0$, поскольку

$$f'_z = e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_z.$$

## 4.2. Существование и единственность конформного отображения

Из теорем 4.1.1 и 4.1.2 со всей очевидностью следует вывод: конформное отображение области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на область $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ осуществляется только однолистными голоморфными функциями с производной, отличной от нуля во всех точках области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$. Основная задача теории конформных отображений заключена в следующем: пусть даны две области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ ; требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую. Понятно, что это должна быть голоморфная функция с ненулевой производной во всей отображаемой области. Решение в некотором смысле этой задачи дает основная теорема теории конформных отображений — теорема Римана. Но прежде, чем приступить к ее формулировке и обсуждению, введем очень важное понятие.

Пусть граница $\partial\Omega$ области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ состоит из конечного числа замкнутых линий, разрезов и точек. Линии и разрезы, входящие в состав границы, всегда будем предполагать *кусочно-гладкими*, т.е. состоящими из конечного числа гладких дуг. (*Дугой* назовем образ отрезка $[\alpha, \beta]$ при отображении гладкой функцией $f : [\alpha, \beta] \to \overline{\mathbb{C}}$ вида $f(t) = x(t) + iy(t)$, где $x, y \in \mathbb{C}^1[\alpha, \beta]$). Число связных областей, на которые разбивается граница $\partial\Omega$ области $\Omega$, называется порядком связности. В частности, если граница $\partial\Omega$ - связное множество, то область $\Omega$ называется *односвязной*. В общем случае, когда граница $\partial\Omega$ разбивается на $n$ связных компонент, область $\Omega$ называется $n$-связной. К примеру,

круг $|z| > 1$ является односвязной областью в $\overline{\mathbb{C}}_z$ и двусвязной в $\mathbb{C}_z$.
Приведенная на рисунке область $\Omega$ является четырехсвязной.

Теперь у нас все готово для формулировки основного результата теории конформных отображений.

**Теорема 4.2.1 (теорема Римана)** *Каковы бы ни были односвязные области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ и $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ с границами, содержащими более, чем одну точку, и как бы ни были заданы точки $z_0 \in \Omega_z$ и $w_0 \in \Omega_w$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$, существует точно одно конформное отображение $w = f(z)$ области $\Omega_z$ на область $\Omega_w$ такое, что $f(z_0) = w_0,\ \arg {f'}_{z_0} = \alpha_0$.*

Доказательство этой теоремы довольно сложно, и поэтому опускается. Однако мы не удержимся от некоторых комментариев к этой теореме. Во-первых, заметим, что теорема, устанавливая существование конформного отображения, не дает рецепта для его нахождения. Это очень большой недостаток, так как иногда для того, чтобы найти требуемое конформное отображение, необходимо приложить очень серьезные интеллектуальные усилия. Во-вторых, единственность найденного конформного отображения зависит от точек $z_0$, $w_0$ и числа $\alpha$. Поэтому, если не требуется особой точности, то теорема представляет достаточно широкий выбор конформных отображений.

Остановимся подробнее на единственности конформного отображения. Прежде всего отметим, что не теряя общности, можно считать область $\Omega_w$ кругом

$$B_1(0) \;=\; \{w \in \mathbb{C}_w \;:\; |w| < 1\}. \tag{1}$$

Действительно, пусть функция $f$ конформно отображает область $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на круг $B_1(0) = \{\tau \in \mathbb{C}_\tau : |\tau| < 1\}$, а функция $\varphi$ конформно отображает область $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ на тот же круг $B_1(0)$. Тогда, как нетрудно заметить, функция $\varphi^{-1} \circ f$ будет конформно отображать область $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на область $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$.

**Упражнение 4.2.1** Пусть функция $f$ конформно отображает область $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на круг (1) . Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $w_0 \in B_1(0)$ -

произвольные числа. Показать, что функция

$$\varphi(z) \;=\; e^{i\alpha}\frac{f(z)-w_0}{1-\bar{w}_0 f(z)}$$

будет конформно отображать область $\Omega_z$ на круг (1).

Стало быть, если не фиксировать числа $\alpha$ и $w_0$, то множество всех конформных отображений области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на область $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$ несчетно.

Рассмотрим еще вопрос о соответствии границ при конформном отображении. Пусть $\gamma_z$ - граница области $\Omega_z$, а функция $f$ конформно отображает область $\Omega_z$ на круг $B_1(0)$. Пусть последовательность $\{z_k\} \subset \Omega_z$ сходится к точке $z_0 \in \gamma_z$ . Тогда все предельные точки последовательности $\{w_k = f(z_k)\}$ лежат на окружности $\gamma_w = \{w \in \mathbb{C}_w \,:\, |w| = 1\}$.

Действительно, если предельная точка $w_0$ последовательности $\{w_k\}$ не лежит на окружности $\gamma_w$, то она обязана быть внутренней точкой круга $B_1(0)$. Поэтому существует окрестность $O_{w_0} \subset B_1(0)$, которую функция $f^{-1}$ будет конформно отображать на некоторую односвязную область $\omega_z$, лежащую строго внутри области $\Omega_z$ (т.е. границы областей $\Omega_z$ и $\omega_z$ не будут иметь общих точек) и содержащую бесконечное число членов последовательности $\{z_k\}$, а это невозможно, ибо $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \in \gamma_z$.

Говорят, что при конформном отображении односвязной области $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ на круг $B_1(0)$ точке $z_0 \in \gamma_z$ соответствует точка $w_0 \in \gamma_w$, если для любой последовательности $\{z_k\} \subset \Omega_z$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ последовательности $\{w_k = f(z_k)\} \subset B_1(0)$ сходится к точке $w_0 \in \gamma_w$.

В настоящее время посредством топологических методов исчерпывающим образом изучен вопрос о соответствии границ при однолистностном конформном отображении. В частности, установлена

**Теорема 4.2.2** *Пусть функция конформно отображает область $\Omega_z$ на круг $B_1(0)$. Тогда функция $f$ биективно и непрерывно отображает замкнутую область $\overline{\Omega}_z$ на замнутый круг $\bar{B}_1(0)$ с сохранением обхода на границах.*

Эта теорема называется *принципом соответствия границ при конформном отображении.* Ее доказательство ввиду сложности опускается.

*Непрерывной кривой* называется геометрическое место точек комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$, удовлетворяющих уравнению

$$z = x(t) + iy(t),$$

где $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – непрерывные функции действительной переменной, определенные на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Непрерывная кривая как непрерывный образ компактного связного множества является компактным связным множеством.

Непрерывная кривая называется *кривой Жордана*[1], если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ инъективны на интервале $(\alpha, \beta)$. Кривая Жордана называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$.

**Пример 4.2.1** Уравнение $z = t,\ t \in [-1, 1]$ определяет кривую, изображенную отрезком действительной оси $x \in [-1, 1]$. Отображение, определяемое функцией $z = t$, очевидно, инъективно на всем отрезке $[-1, 1]$, следовательно, это — Жорданова кривая.

**Пример 4.2.2** Уравнение $z = \cos t, t \in [0, \pi]$ тоже определяет кривую Жордана, тождественную предыдущей.

**Пример 4.2.3** Кривая $z = \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$ тоже изображается отрезком $[-1, 1]$ действительной оси. Однако данная кривая не тождественна предыдущим, поскольку каждая точка этой кривой имеет два прообраза. Следовательно, данная кривая не является кривой Жордана.

**Теорема 4.2.3 (теорема Жордана)** *Замкнутая кривая Жордана делит расширенную комплексную плоскость на две области, внутреннюю (не содержащую точки $z = \infty$) и внешнюю (содержащую точку $z = \infty$).*

[1]Мари Эдмон Камиль Жордан (1838-1922) — французский математик. Основные направления исследований — математический анализ, алгебра, топология, теория чисел, дифференциальные уравнения.

Пусть имеются кривые Жордана $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n$, обладающие следующими свойствами:

(i) кривая $\Gamma_0$ замкнута;

(ii) все $\Gamma_k$, $k = 1, 2, ...n$, лежат во внутренней области, ограниченной $\Gamma_0$;

(iii) каждая $\Gamma_k$ лежит во внешней области, ограниченной $\Gamma_l, k = 1, 2, ...n$, $l \neq k$.

Множество точек комплексной плоскости, лежащих внутри $\Gamma_0$ и вне каждой $\Gamma_k$ называются $(n+1)$-*связной областью.* Кривые $\Gamma_k$, $k = 1, 2, ...n$, называются *компонентами* границы $(n+1)$-связной области.

При изменении $t \in [\alpha, \beta]$ от $\alpha$ и $\beta$ точка $z = z(t)$ на кривой Жордана $\Gamma$ совершает *обход.* Если при обходе замкнутой кривой Жордана $\Gamma$ ограничиваемая ею внутренняя область остается слева, то направление обхода называется *положительным.*

Жорданова кривая называется *гладкой*, если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$, причем $z'(\alpha) = z'(\beta)$, если $z(\alpha) = z(\beta)$.

Жорданова кривая называется *кусочно-гладкой,* если отрезок $[\alpha, \beta]$ можно разделить на конечное число промежутков, внутри каждого из которых функция $z' = z'(t)$ непрерывна и отлична от нуля, а на границах промежутков имеет отличные от нуля пределы как справа, так и слева. Замкнутая кусочно-гладкая кривая Жордана называется *контуром.*

## 4.3. Конформность, групповое и круговое свойства дробно-линейной функции

*Дробно-линейной функцией* называется функция вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = DL(z),$$

где числа $, , , d \in \mathbb{C}$, причем $|c| + |d| \neq 0$. Заметим, что при $= 0$, дробно-линейная функция превращается в линейную, а при $d = 0$ — в функцию

$$w = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{z} + \frac{a}{c},$$

которая является композицией линейной функции и функции $w = z^{-1}$.

Пусть точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_z \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Тогда

$$DL(z_1) - DL(z_2) \ = \ \frac{(ad-bc)(z_1-z_2)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}.$$

Поэтому, если

$$ad \ \neq bc, \tag{1}$$

то функция $DL$ однозначна и однолистна в проколотой плоскости $\mathbb{C}_z \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, причем обратная функция

$$DL^{-1}(w) \ = \ \frac{dw-b}{-cw+a}$$

будет тоже дробно-линейной.

Дробно-линейная функция, для которой справедливо (1), называется *невырожденной* дробно-линейной функцией. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только невырожденных дробно-линейных функций.

Заметим, что

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}} DL(z) \ = \ \lim_{z\to-\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} \ = \ \infty,$$

$$\lim_{z\to\infty} DL(z) \ = \ \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} \ = \ \frac{a}{c},$$

$$DL'(z) \ = \ \frac{ac-bd}{(cz+d)^2} \ \neq \begin{cases} 0, & \text{при } z \neq \infty, \\ \infty, & \text{при } z \neq -\frac{d}{c}. \end{cases}$$

Поэтому, доопределив дробно-линейную функцию $w = DL(z)$ так, чтобы

$$DL\left(-\frac{d}{c}\right) \ = \ \infty \quad \text{и} \quad DL(\infty) \ = \ \frac{a}{c},$$

получим следующий результат.

**Теорема 4.3.1** *Невырожденная дробно-линейная функция однозначна и однолистна в расширенной комплексной плоскости и голоморфна в проколотой плоскости $\mathbb{C}_z \setminus \{-d/c\}$, причем обратная к ней функция также является невырожденной дробно-линейной функцией однозначной и однолистной в расширенной комплексной плоскости и голоморфной в проколотой плоскости $\mathbb{C}_w \setminus \{a/c\}$.*

Представим невырожденную дробно-линейную функцию

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

как композицию трех функций

$$\xi = \frac{c^2}{bc-ad}z + \frac{cd}{bc-ad}, \quad \eta = \frac{1}{\xi}, \quad w = \eta + \frac{a}{c}.$$

**Упражнение 4.3.1** Доказать возможность такого представления.

Из такого представления и из упражнений 2.1.1 и 2.1.2 вытекает

**Теорема 4.3.2** *Невырожденная дробно-линейная функция переводит прямые и окружности в прямые или окружности.*

Теорема 4.3.2 устанавливает *круговое свойство* невырожденных дробно-линейных функций.

Дробно-линейная функция $w = DL(z)$ голоморфна при $z \neq -d/c$ и

$$DL'_z = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

при $z \neq \infty$. Поэтому функция $DL$ конформно отображает проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C}_z \setminus \{-d/c\}$ на проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C}_w \setminus \{\infty\}$. Покажем, что и в окрестностях точек $z = -d/c$ и $z = \infty$ дробно-линейная функция является конформным отображением.

Для этого рассмотрим частный случай дробно-линейной функции

$$w = \frac{1}{z} \tag{2}$$

и покажем, что функция (2) конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}_z$ на $\overline{\mathbb{C}}_w$. Ясно, что для функции (2) конформность необходимо установить лишь в точках $z = 0$ и $z = \infty$.

Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ - два луча, образующие углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$ соответственно с действительной осью в плоскости $\mathbb{C}_z$.

Таким образом, угол между ними равен $\alpha_2 - \alpha_1$ . При взгляде на сферу Римана ясно, что эти лучи пересекаются в бесконечно удаленной точке. Под *углом в бесконечно удаленной точке между двумя лучами* $\gamma_1$ и $\gamma_2$ будем понимать тот угол, который образуют эти лучи при отображении $z \to 1/z$. Найдем этот угол. Для этого запишем параметрические уравнения этих лучей:

$$\gamma_k = \{z \in \mathbb{C}_z : z = r(\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k),\ 0, r, \infty\},\ k = 1, 2$$

и подвергнем каждый луч преобразованию $1/z$. Получим лучи $\gamma'_1$ и $\gamma'_2$ соответственно , “входящие” в точку 0, причем

$$\gamma'_k = \left\{ z \in \mathbb{C}_z : z = \frac{1}{r}(\cos(-\alpha_k) + i\sin(-\alpha_k)), 0, r, \infty \right\}, k = 1, 2.$$

Поскольку лучи $\gamma'_1$ и $\gamma'_2$ “входят” в точку 0, то они образуют соответственно, углы $\pi - \alpha_1$ и $\pi - \alpha_2$ с действительной осью. Отсюда угол между $\gamma'_1$ и $\gamma'_2$ равен

$$\pi - \alpha_2 - (\pi - \alpha_1) = -(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Итак, функция $w = \frac{1}{2}$ конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}_w$. Теперь представим дробно-линейную функцию $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ как композицию трех функций:

$$\xi = \frac{c^2}{bc - ad}z + \frac{cd}{bc - ad},\ \eta = \frac{1}{\xi},\ w = \eta + \frac{a}{c}, \tag{3}$$

где $c \neq 0$. Такое представление нетрудно усмотреть в тождестве

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}, \quad c \neq 0.$$

Каждая из функций (3) конформно отображает расширенную комплексную плоскость на расширенную комплексную плоскость, и, значит, их композиция будет конформно отображать $\overline{\mathbb{C}}_z$ на $\overline{\mathbb{C}}_w$. Таким образом получена

**Теорема 4.3.3** *Невырожденная дробно-линейная функция конформно отображает* $\overline{\mathbb{C}}_z$ *на* $\overline{\mathbb{C}}_w$.

Сопоставим каждой невырожденной дробно-линейной функции

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{матрицу} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

которая, очевидно, невырожденная. Рассмотрим композицию двух невырожденных дробно-линейных функций

$$\xi = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{и} \quad w = \frac{e\xi+f}{g\xi+h}.$$

**Упражнение 4.3.2** Доказать, что композиция дробно-линейных функций $\xi = DL(z)$ и $w = DL(\xi)$ будет невырожденной дробно-линейной функцией $w = (kz+l)/(mz+n)$, причем ее коэффициенты находятся из формулы

$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Известно, что множество невырожденных квадратных матриц порядка 2 над полем $\mathbb{C}$ образует группу относительно умножения, которая обозначается символом $GL(2,\mathbb{C})$.

**Упражнение 4.3.3** Доказать, что множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

образует нормальную подгруппу группы $GL(2,\mathbb{C})$.

Обозначим эту подгруппу символом $Diag(2,\mathbb{C})$, а символом $DL(2,\mathbb{C})$ обозначим фактор-группу $GL(2,\mathbb{C})/Diag(2,\mathbb{C})$. В силу упражнений 4.3.2 и 4.3.3 очевидна

**Теорема 4.3.4** *Множество невырожденных дробно-линейных функций образует группу относительно композиции, изоморфную группе $DL(2,\mathbb{C})$.*

Теорема 4.3.4 устанавливает *групповое свойство* дробно-линейных функций.

## 4.4. Свойства сохранения симметрии и ангармонического отношения дробно-линейной функции

Точки называются *симметричными относительно прямой или окружности* $\gamma$, если любая прямая или окружность, проходящая через них, перпендикулярна $\gamma$.

Поскольку любая прямая - это окружность на сфере Римана, проходящая через бесконечно удаленную точку, то в определении **??** слова "прямой" и "прямая" излишни.

Покажем теперь, что в случае, когда $\gamma$ - прямая, наше определение симметричных точек эквивалентно общепринятому.
Во-первых, заметим, что в силу определения **??** симметричные точки $z$ и $z^*$ уже лежат на прямой, перпендикулярной $\gamma$. Покажем, во-вторых, что они лежат на равных расстояниях от $\gamma$. Для этого проведем через них окружность $\delta$, центр которой $z_0$ в силу определения **??** должен лежать на $\gamma$. Равенство отрезков $\mid z-\xi \mid$ и $\mid z^*-\xi \mid$ следует из равенства треугольников $\nabla z_0 z\xi$ и $\nabla z_0\xi z^*$.

А теперь рассмотрим случай, когда $\gamma$ - окружность с центром в точке $z_0$ и радиусом $R$. Очевидно, что точки $z$ и $z^*$ лежат на прямой, проходящей через точку $z_0$. Проведем через точки $z$ и $z^*$ окружность $\delta$, которая перпендикулярна $\gamma$ в точке $\xi$.
Отсюда в силу известной теоремы планиметрии имеем $\mid z_0-\xi\mid^2 = \,=\mid z-z_0 \mid \cdot \mid z^*-z_0 \mid$. Поскольку еще $\arg(z-z_0)=\arg(z^*-z_0)$, то окончательно получим

$$z^*-z_0 \;=\; \frac{R^2}{\bar z-\bar z_0}.$$

**Теорема 4.4.1** *Пусть $z$ и $z^*$ – точки, симметричные относительно прямой или окружности $\gamma$. Тогда любая невырожденная дробно-линейная функция $w = DL(z)$ переводит их в точки $w$ и $w^*$ соответственно, симметричные относительно прямой или окружности $\Gamma = DL[\gamma]$.*

$\triangleleft$ Проведем через точки $z$ и $z^*$ окружность $\delta$, которая в силу определения **??** ортогональна $\gamma$.
В силу кругового свойства определения **??** ортогональна $\gamma$. В силу кругового свойства при отображении дробно-линейной функцией $\gamma$ и $\delta$ перейдут в окружности или прямые $\Gamma$ и $\Delta$, причем в силу свойства конформности дробно-линейной функции $\Gamma$ и $\Delta$ будут перпендикулярны. $\triangleright$

**Следствие 4.4.1** *Если при отображении дробно-линейной функцией прямая или окружность $\gamma$ переходит в окружность $\Gamma$ и одна из точек переходит в центр окружности $\Gamma$, то симметричная ей относительно $\gamma$ точка переходит в бесконечно удаленную точку.*

Теорема 4.4.1 устанавливает *свойство сохранения симметрии* дробно-линейной функции.

Пусть $z, z_1, z_2$ и $z_3$ – попарно различные точки расширенной комплексной плоскости. Соотношение

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z - z_2)(z_3 - z_1)} \qquad (1)$$

называется *ангармоническим отношением.*

**Теорема 4.4.2** *Для любой невырожденной дробно-линейной функции $w = DL(z)$ имеет место равенство*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}, \qquad (2)$$

*где $w_k = DL(z_k),\ k = 1, 2, 3.$*

$\triangleleft$ Пусть

$$DL(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

тогда

$$w - w_k = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d}, \ k = 1, 2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d},$$

$$\frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{cz_2 + d}{cz_1 + d}.$$

Поделив первое равенство на второе, получим требуемое. $\triangleright$

Теорема 4.4.2 устанавливает свойство *сохранения ангармонического отношения* дробно-линейной функции.

**Следствие 4.4.2** *Существует единственная невырожденная дробно-линейная функция, переводящая три различные наперед заданные точки $z_1, z_2$ и $z_3$ в три различные наперед заданные точки $w_1, w_2$ и $w_3$.*

$\triangleleft$ Искомая дробно-линейная функция однозначно определяется соотношением (2), которому можно придать вид

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \lambda, \quad \lambda = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \triangleright$$

**Упражнение 4.4.1** Выяснить, как будет выглядеть ангармоническое отношение (2), когда одной из точек $z, z_1, z_2$ или $z_3$ будет бесконечно удаленная точка.

Установленные свойства дробно-линейных функций активно используются при построении конформных отображений так называемых круговых областей, т.е. областей, границы которых являются окружности, либо прямые.

**Теорема 4.4.3** *Любую круговую область $\Omega_z \subset \overline{\mathbb{C}}_z$ можно отобразить посредством дробно-линейной функции на любую круговую область $\Omega_w \subset \overline{\mathbb{C}}_w$.*

◁ Выберем на границе $\partial\Omega_z$ три точки $z_1, z_2$ и $z_3$, занумерованные в порядке положительного обхода $\Omega_z$, а на $\partial\Omega_w$ таким же образом выберем точки $w_1, w_2$ и $w_3$. По формуле (2) построим дробно-линейную функцию и покажем, что она является искомой.

Действительно, в силу кругового свойства эта функция будет переводить $\partial\Omega_z$ в $\partial\Omega_w$. В силу сохранения симметрии область $\Omega_z$ переходит в область $\Omega_w$, либо в область $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \overline{\Omega}_w$. Но так как конформные отображения первого рода сохраняют ориентацию, а точки $w_1, w_2$ и $w_3$ расположены относительно $\Omega_w$ так же, как расположены точки $z_1, z_2$ и $z_3$ относительно $\Omega_z$, то наша дробно-линейная функция отображает $\Omega_z$ именно в $\Omega_w$. ▷

# 5. Ряды Тейлора и Лорана

## 5.1. Степенные ряды. Радиус сходимости

*Степенным* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{1.2.1}$$

где $z_0 \in \mathbf{C}$ некоторая фиксированная точка, а числа $a_k \in \mathbf{C}, k = 0, 1, \dots$ – называются *коэффициентами* ряда. Вводя замену $\xi = z - z_0$ и переобозначая $\xi$ через $z$, перепишем ряд (1.2.1) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{1.2.2}$$

Каждый член ряда (1.2.2) определен на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, и по крайней мере в точке $z = 0$ ряд (1.2.2) сходится. Поскольку при $z = z_0$ или при $z = 0$ первый член ряда (1.2.1) или (1.2.2) не определен, то, строго говоря, мы под выражениями (1.2.1) или (1.2.2) понимаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

соответственно.

ПРИМЕР 1.2.1. Ряд

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$$

сходится только в точке $z = 0$. В самом деле, пусть $z \neq 0$, тогда для всех достаточно больших $k \in \mathbf{N}$ $\quad |kz| > 2$ и, следовательно, $|k^k z^k| > 2^k$. Таким образом, в точке $z \neq 0$ нарушено необходимое условие сходимости числового ряда.

ПРИМЕР 1.2.2. Ряд

$$1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k^k}$$

сходится во всей комплексной плоскости. Действительно, в любой точке $z \in \mathbf{C}$ при достаточно больших $k \in \mathbf{N}$ имеем

$$\left|\frac{z}{k}\right| < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$\left|\frac{z^k}{k^k}\right| < \frac{1}{2^k}.$$

Поэтому сходимость ряда вытекает из признака Вейерштрасса для равномерной сходимости функциональных рядов и из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}.$$

ПРИМЕР 1.2.3. Как нетрудно убедиться, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Для каждого степенного ряда (1.2.2) существует окружность* $\{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}(0 \le R \le \infty)$, *внутри которой этот ряд сходится, а вне – расходится.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.1. Величина $R$, определяемая теоремой 1.2.2, называется *радиусом сходимости*, а круг $\{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ – *кругом сходимости* ряда (1.2.2).

ТЕОРЕМА 1.2.3 (формула Коши - Адамара). *Пусть*

$$L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

*Тогда радиус сходимости $R$ ряда (1.2.2) определяется соотношением*

$$R = L^{-1},$$

*причем $R = +\infty$ при $L = 0$ и $R = 0$ при $L = +\infty$.*

## 5.2. Ряды Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k, \tag{2.1.1}$$

где $a_k \in \mathbf{C}, k = -1, -2, ..., \quad z_0 \neq \infty$. Каждый член этого ряда имеет смысл, если $z \in \mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. В результате замены $\xi^{-1} = z - z_0$ ряд (2.1.1) превратится в степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\xi^k. \tag{2.1.2}$$

Положив $\xi = 0$ при $z = \infty$, убедимся в том, что если $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi| < r_1\}$ – круг сходимости ряда (2.1.2), то ряд (2.1.1) абсолютно сходится в каждой точке вне замкнутого круга $\{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| \leq r = r_1^{-1}\}$. В силу признака Вейерштрасса ряд (2.1.1) сходится равномерно при $|z-z_0| > r$, поэтому он определяет голоморфную функцию

$$S_1(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

сходится в круге $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < R\}$ (обозначим его сумму через $S_2(z)$), а степенной ряд (2.1.1) сходится при $|z - z_0| > r$, то в кольце $\{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$ функция $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ голоморфна и представляет сумму ряда

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Сформулируем и докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1.1(теорема Лорана). *Голоморфная в кольце* $\{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$ *функция* $f$ *в каждой точке этого*

*кольца представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{2.1.3}$$

*где*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi, \tag{2.1.4}$$

*а* $\gamma$ *– окружность* $\{\xi \in \mathbf{C} : |\xi - z_0| < \rho\}, r < \rho < R.$ $\triangleleft$ Возьмем точку $z$ из кольца и рассмотрим другое кольцо $\{z \in \mathbf{C} : r_1 < |z - z_0| < R_1\}$, содержащее эту точку и такое, что $r < r_1 < R_1 < R\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Ряд (2.1.3), коэффициенты $a_k, k \in \mathbf{Z}$ которого находятся по формулам (2.1.4), называется *рядом Лорана* функции $f$, а ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{и} \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

– соответственно *правильной*(*регулярной*) и *главной* (*иррегулярной*) частями ряда Лорана.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Голоморфная в кольце* $\{z \in \mathbf{C} : r < |z - z_0| < R\}$ *функция* $f$ *единственным образом может быть представлена в виде ряда (2.1.4).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.1. При определении ряда Лорана (2.1.3) *не исключается* случай, когда $r = 0$ или $R = +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Из определения 2.1.1 непосредственно следует, что ряды Тейлора являются частным случаем рядов Лорана. Другим частным случаем являются ряды Фурье. Действительно, пусть функция $f$ голоморфна в кольце $\{z \in \mathbf{C} : 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$. Тогда в этом кольце она может быть представлена своим рядом Лорана

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=1} f(\xi) \xi^{-k-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{0}^{2\pi} f(e^{i\tau}) e^{-ik\tau} d\tau.$$

В частности, для точек $z = e^{it}$ единичной окружности получим

$$\varphi(t) = f(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}. \tag{2.1.8}$$

Ряд (2.1.8) представляет собой ряд Фурье функции $\varphi$, записанный в комплексной форме. В самом деле,

$$\varphi(t) = c_0 + \sum_{1}^{\infty}(c_k e^{ikt} + c_{-k}e^{-ikt}) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где $c_0 = a_0/2, a_k = c_k - c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k})$.

# 6. Изолированные особые точки и вычеты функций

## 6.1. Классификация особых точек

Здесь мы приводим классификацию изолированных особых точек однозначного характера как комплексной плоскости, так и бесконечно удаленной точки $\infty$, которую **будем всегда причислять к особым**. В обоих случаях особенности бывают трех видов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Формально их определения для бесконечно удаленной точки и точки комлексной плоскости отличаются, поэтому приведем их отдельно.

**Изолированные особые точки комплексной плоскости.**

Точки, в которых функция $f(z)$ перестает быть аналитической, называются особыми. Если в достаточно малой окрестности особой точки нет других особых точек, то данная особая точка называется изолированной. Как уже сказано, изолированные особые точки бывают трех типов: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка.

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется *устранимой*, если существует конечный предел $\lim_{z\to z_0} f(z) \neq f(z_0)$. Для того, чтобы изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности $z_0$ не содержало главной части, т.е. представляло бы ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$$

Данная функция совпадает с суммой ряда, если $z \neq z_0$. Если "исправить"функцию, положив $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) = a_0$, то она станет аналитической в окрестности точки $z_0$. Тем самым, особенность можно устранить, с чем и связано ее название.

**Пример.** $f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z_0 = 0$. Функция не определена в 0, следовательно, не может быть аналитической в этой точке. Других особых точек в окрестности нуля нет (да и вообще нет, кроме бесконечно удаленной), значит, это изолированная особая точка. Так как $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

(Доопределив значение $f$ в нуле этим пределом, то есть, положив $f(0) = 1$, получим аналитическую в нуле функцию.)

В этом примере функция в окрестности $z_0$ легко может быть представлена в виде ряда Лорана

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - z^3/3! + \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots,$$

так что способ определения типа особой точки не имеет значения. Вообще же выбирается тот, который проще реализовать технически. При верной реализации ответ от способа решения, естественно, не зависит.

**Пример.** $f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad z_0 = 0$. Аналитичность функции, кроме 0, нарушается еще и в точках вида $\pi k$, $k$ - целое, в которых знаменатель обращается в ноль. Ближайшие такие точки расположены на расстоянии $\pi$ от нашей, значит, найдется окрестность 0, которая других особых точек не содержит. Тогда 0 - изолированная особая точка. Так как $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$, то 0 - устранимая особая точка.

Разложение функции в ряд Лорана здесь затруднительно, но в этом нет необходимости.

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется *полюсом*, если $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Для того, чтобы изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в проколотой окрестности $z_0$ содержала бы лишь конечное число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$$

Отсюда видно, что в этом (и только в этом) случае существует **конечный и ненулевой** предел $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m$, или, что то же самое, $f(z) \sim \frac{A}{(z-z_0)^m}$ при $z \to z_0$, где $A \neq 0$. Натуральное число $m$ называется *порядком полюса*. Полюс первого порядка также принято называть *простым*.

**Пример.** $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, $\quad z_0 = 0$. Очевидно, 0 - изолированная особая точка. Вычисляя $\lim_{z\to 0} f(z)$, получим бесконечность (числитель стремится к 1, знаменатель к нулю). Таким образом, $z_0 = 0$ является полюсом. Определим его порядок. При $z \to 0$

$$\frac{e^z}{z^2} \sim \frac{1}{z^2},$$

так что $m = 2$, и наш полюс - второго порядка.

Того же результата так же легко можно было достичь, раскладывая функцию $f$ в ряд Лорана в окрестности $z_0 = 0$:

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1+z+z^2/2!+z^3/3!\ldots}{z^2} = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{3!}\ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит конечное число слагаемых (два) и начинается с -2 степени, так что $m = 2$. Итак, 0 - полюс второго порядка.

Как и в случае устранимых особых точек, работать с рядами Лорана не всегда удобно, в отличие от эквивалентностей.

**Пример.** $f(z) = \frac{z}{\sin^2 z}$, $\quad z_0 = \pi$. Здесь и далее проверку изолированности особой точки оставляем за читателем.

$$\lim_{z\to\pi} \frac{z}{\sin^2 z} = \infty,$$

значит, точка является полюсом. Определим его порядок. При $z \to \pi$

$$\frac{z}{\sin^2 z} \sim \frac{\pi}{\sin^2 z} = \frac{\pi}{\sin^2(z-\pi+\pi)} = \frac{\pi}{\sin^2(z-\pi)} \sim \frac{\pi}{(z-\pi)^2}, \text{ так как } z-\pi \to 0.$$

Итак, $m = 2$, и точка является полюсом второго порядка.

**Пример.** $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z+2z^3-\sin z}$, $z_0 = 0$. При $z \to 0$

$$\frac{\sin^2 z}{z+2z^3-\sin z} \sim \frac{z^2}{z+2z^3-z+z^3/3!+o(z^3)} = \frac{z^2}{\frac{13}{6}z^3(1+o(1))} \sim \frac{6}{13z}$$

Таким образом, 0 является полюсом первого порядка (= простым полюсом).

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется *существенно особой*, если $\lim_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Нам будет полезен следующий результат:

**Лемма 1** *Если предел функции в точке существует, то пределы этой функции вдоль любой непрерывной кривой, входящей в эту точку, существуют и все равны между собой.*

**Пример.** $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$. Рассмотрим два предела:

$$\lim_{\substack{z=x+i0\\x\to 0-0}} f(z) = \lim_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

когда точка $z$ стремится к 0 слева строго вдоль вещественной прямой и

$$\lim_{\substack{z=x+i0\\x\to 0+0}} f(z) = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

когда точка $z$ стремится к 0 справа строго вдоль вещественной прямой.

Пределы не совпадают. Значит, $\lim_{z\to 0} f(z)$ не существует, и 0 является существенно особой точкой.

**Замечание.** Отметим, что из совпадения пределов по двум наугад выбранным направлениям никакого вывода сделать нельзя.

Для того чтобы изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в проколотой окрестности $z_0$ содержала бы бесконечное число членов:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Так, в предыдущем примере, в проколотой окрестности нуля

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

**Бесконечно удаленная особая точка.** Точка $z_0 = \infty$ называется *изолированной* бесконечно удаленной особой точкой, если все другие особые точки можно заключить в один круг.

**Примеры.** 1) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$. Особые точки: $\pi k$, $k$ — целое, и $\infty$. Все особые точки, кроме бесконечно удаленной, являются изолированными.

2) $f(z) = \frac{z}{\sin 1/z}$. Особые точки: 0, $1/(\pi k)$, $k$ — целое, и $\infty$. Все особые точки, кроме 0, в том числе и бесконечно удаленная, являются изолированными.

Изолированную особую точку $z_0 = \infty$ будем называть *устранимой особой точкой*, если существует (конечный!) $\lim_{z \to \infty} f(z)$. Необходимым и достаточным условием этого является совпадение $f$ с правильной частью своего ряда Лорана в некоторой окрестности бесконечности:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k z^k = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n} + \ldots + ...$$

**Пример**. $f(z) = \frac{1}{z}$. Предел $\lim_{z \to \infty} 1/z = 0$, следовательно, бесконечность является устранимой особой точкой.

Изолированная особая точка $z = \infty$ называется *полюсом*, если $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Это возможно только в случае, когда в окрестности бесконечности главная часть ряда Лорана фукнции

$f$ содержит конечное число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{0} a_k z^k + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m.$$

Если при этом $a_m \neq 0$, точка $\infty$ называется *полюсом $m$-го порядка*. Эквивалентное определение выглядит следующим образом:

бесконечно удаленная точка называется *полюсом $m$-го порядка*, если при $z \to \infty$

$$f(z) \sim Az^m, \text{где } A \text{ — ненулевая постояннная.}$$

**Пример**. $f(z) = z^2 e^{-1/z}$.

Первый способ: поскольку при $z \to \infty$ $z^2 e^{-1/z} \sim z^2$, бесконечность является полюсом второго порядка. Тот же результат получается и так:

Второй способ: Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$z^2 e^{-1/z} = z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z^k} = z^2 (1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} - \frac{1}{3! z^3} + \ldots) = z^2 - z + \frac{1}{2} - \frac{1}{6z} + \ldots.$$

Изолированная бесконечно удаленная особая точка называется *существенно особой*, если $\lim_{z\to\infty} f(z)$ не существует. Это происходит только в том случае, когда главная часть ряда Лорана функции $f$ в окрестности бесконечности содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k.$$

Если предел функции в точке существует, то пределы этой функции вдоль любой непрерывной кривой, входящей в эту точку, существуют и все равны между собой.

**Пример.** $f(z) = e^z$.

Покажем, что бесконечность является существенно особой точкой.

Первый способ:

Заметим, что

$$\lim_{\substack{z=x+i0\\x\to+\infty}} e^z = \lim_{x\to+\infty} e^x == +\infty,$$

когда точка $z$ стремится к бесконечности строго вдоль вещественной прямой на ее положительном направлении и

$$\lim_{\substack{z=x+i0\\x\to-\infty}} f(z) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

когда точка $z$ стремится к бесконечности строго вдоль вещественной прямой на ее отрицательном направлении. Пределы различны, следовательно, $\lim_{z\to\infty} f(z)$ не существует (см. лемму **??**).

Второй способ:

Разложение нашей функции в ряд Лорана в окрестности бесконечности следующее:

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Как видно, главная часть содержит бесконечно много слагаемых.

Существенно особой точкой бесконечность является также для функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Если предел функции в точке существует, то пределы этой функции вдоль любой непрерывной кривой, входящей в эту точку, существуют и все равны между собой.

**Примеры.** Найти все особые точки и определить их тип:

1) $f(z) = \dfrac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3}$. Особые точки: $0, 1, i, \infty$. $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$ , так что 0 - устранимая особая точка. $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$, значит точка 1 - полюс. Аналогично, полюсом является и точка $i$.

$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, и значит, бесконечность является устранимой особой точкой.

Определим порядок полюсов. При $z \to 1$

$$\frac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3} \sim \frac{1}{(1-i)^3(z-1)},$$

значит, точка 1 — полюс первого порядка.

При $z \to i$

$$\frac{z^2}{z(z-1)(z-i)^3} \sim \frac{i}{(z-i)^3},$$

следовательно, этот полюс — третьего порядка.

2) $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$. Особые точки определяются из уравнения $e^z = 1$. Это набор точек $z = 2\pi k i$, $k$ — целое. Бесконечность, следовательно, является неизолированной особой точкой.

Отдельно рассмотрим точку $z_0 = 0$, соответствующую $k = 0$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1,$$

следовательно, 0 - устранимая особая точка. При $k \neq 0$

$$\lim_{z\to 2\pi k i} \frac{z}{e^z - 1} = \infty,$$

каждая из этих точек является полюсом. Определим его порядок. При $z \to 2\pi k i$, где $k$ ненулевое

$$\frac{z}{e^z - 1} \sim \frac{2\pi k i}{e^{z-2\pi k i+2\pi k i} - 1} = \frac{2\pi k i}{e^{z-2\pi k i} - 1} \sim \frac{2\pi k i}{z - 2\pi k i}.$$

Таким образом, все особые точки, кроме 0 и бесконечности, являются простыми полюсами.

**Задачи:**

1. Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

11.1 $\dfrac{e^{9z} - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

11.2 $z^3 e^{7/z^2}$

11.3 $\dfrac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.4 $\dfrac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$

11.5 $\dfrac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

11.6 $\dfrac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$

11.7 $z \sin \dfrac{6}{z^2}$

11.8 $\dfrac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

11.9 $\dfrac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.10 $\dfrac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$

11.11 $\dfrac{e^{5z} - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

11.12 $\dfrac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$

11.13 $z^4 \sin \dfrac{5}{z^2}$

11.14 $\dfrac{cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

11.15 $\dfrac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.16 $\dfrac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$

11.17 $\dfrac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

11.18 $ze^{4/z^3}$

11.19 $\dfrac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$

11.20 $\dfrac{cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

11.21 $\dfrac{e^{7z} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.22 $\dfrac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$

11.23 $z \sin \dfrac{3}{z^3}$

11.24 $\dfrac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

11.25 $\dfrac{\operatorname{sh} 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$

11.26 $\dfrac{ch3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$

11.27 $\dfrac{e^{z^4} - 1}{\cos z - 1 + z^2/2}$

11.28 $\dfrac{\sin z^4 - z^4}{\operatorname{sh} z - z + z^3/6}$

11.29 $z \cos \dfrac{2}{z^3}$

11.30 $\dfrac{\cos \frac{z^4}{2}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$

11.31 $\dfrac{e^{z^5 - 1}}{e^z - 1 - z}$

2. Для данной функции найти изолированные точки и определить их тип.

12.1.

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin \frac{1}{z}}.$$

12.2.

$$\frac{1}{\cos z}.$$

12.3.

$$\operatorname{tg}^2 z.$$

12.4.
$$z \operatorname{tg} z e^{\frac{1}{z}}.$$

12.5.
$$\frac{e^z - 1}{z^3 (z+1)^3}.$$

12.6.
$$\frac{z^2 + 1}{(z-i)^2 (z^2 + 4)}.$$

12.7.
$$\frac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}.$$

12.8.
$$\operatorname{tg}\frac{1}{z}.$$

12.9.
$$\operatorname{ctg}\frac{1}{z}.$$

12.10.
$$\frac{1}{e^z + 1}.$$

12.11.
$$\operatorname{ctg}\pi z.$$

12.12.
$$\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}.$$

12.13.
$$\frac{1}{\sin z^2}.$$

12.14.
$$\frac{\sin 3z - 3\sin z}{z(\sin z - z)}.$$

12.15.
$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

12.16.
$$\frac{e^z-1}{\sin\pi z}.$$

12.17.
$$\operatorname{th} z.$$

12.18.
$$\frac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}.$$

12.19.
$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(e^z-1)(1-z)^3}.$$

12.20.
$$\frac{1}{z^2}+\sin\frac{1}{z^2}.$$

12.21.
$$\frac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}.$$

12.22.
$$z^2\sin\frac{1}{z}.$$

12.23.
$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}.$$

12.24.
$$\frac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}.$$

12.25.
$$\frac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}.$$

12.26.
$$\operatorname{ctg}\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}.$$

12.27.
$$\frac{\sin 3z^2}{z(z^3+1)}e^{\frac{1}{z}}.$$

12.28.
$$\frac{\cos \pi z}{(4z^2-1)(z^2+1)}.$$

12.29.
$$\frac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}.$$

12.30.
$$\frac{2z-\sin 2z}{z^2(z^2+1)}.$$

12.31.
$$\frac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}.$$

## 6.2. Вычеты функций

Вычетом функции $f$ в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется коэффициент $a_{-1}$ при минус первой степени $(z-z_0)^{-1}$ в ее разложении в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z_0$. Обозначается вычет $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}$.

Точно так же вычетом функции $f$ в точке $z_0 = \infty$ называется взятый со знаком "минус"коэффициент $a_{-1}$ при минус первой степени $z^{-1}$ в разложении в ряд Лорана в окрестности бесконечности и обозначается $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}$.

Если точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является точкой аналитичности функции $f$, то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки совпадает с разложением в ряд Тейлора, следовательно, главная часть ряда Лорана тождественно нулевая. Отрицательные же степени могут содержаться в нашем случае только в ней. Отсюда следует **важный вывод: в неособых точках вычет всегда нулевой.** Есть смысл считать вычеты только в особых (изолированных) точках, в том числе и в бесконечно удаленной.

Далее, в устранимых особых точках на комплексной плоскости главная часть ряда Лорана также тождественно нулевая, и

ряд содержит только положительные степени. Таким образом, **в устранимых особых точках комплексной плоскости вычет также всегда нулевой**. *Внимание!* Этот вывод не касается бесконечно удаленной особой точки, так как там отрицательные степени содержатся в правильной части ряда Лорана, так что устранимость особой точки не гарантирует их отсутствия. Для нее важно отсутствие положительных степеней, которые содержит главная часть.

В случаях, когда разложение в ряд Лорана или по крайней мере одно слагаемое оттуда — минус первую степень с коэффициентом, получить нетрудно, вычет можно вычислять по определению.

**Примеры.**

1)Найти $\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z}$. В проколотой окрестности нуля

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots,$$

получаем $\operatorname*{res}_{z=0} e^{1/z} = 1$.

2)Найти $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\sin z}$. Вычислив предел функции в нуле, легко убедиться,что 0 - устранимая особая точка, следовательно, вычет нулевой.

3)Найти $\operatorname*{res}_{z=\infty} \sin(1/z)$. Хотя бесконечность - устранимая особая точка (проверьте!), разложив в ее окрестности функцию в ряд Лорана, получим

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

откуда имеем $\operatorname*{res}_{z=\infty} \sin(1/z) = -1$.

**Вычисление вычетов в точках $z_0 \in \mathbb{C}$.**

**а) Случай простого полюса.** Если точка $z_0$ является простым полюсом для $f$, то вычет в этой точке может быть вычислен по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} [f(z)(z - z_0)]. \qquad (3)$$

В некоторых частных случаях формула для вычета приобретает еще более простой вид, отчего приведенная выше не теряет своей актуальности.

Так, например, если функция $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z - z_0}$, причем функция $\varphi$ аналитическая в $z_0$ и $\varphi(z_0) \neq 0$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0)$.

**б) Полюсы более высоких порядков.** Общая формула для вычисления вычета в полюсе $z_0 \in \mathbb{C}$ порядка $m$ выглядит следующим образом:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ f(z)(z - z_0)^m \right].$$

**Примеры.**

1) Найти $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\sin^2 z}$.

Определим тип особой точки 0. Это полюс первого порядка, т.е. простой. Воспользуемся формулой (3):

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z}{\sin^2 z} = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin^2 z} = 1.$$

2) Найти $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2}$.

Определим тип особой точки. При $z \to 0$

$$\sin^2 z - \sin z^2 = (z - \frac{z^3}{6} + o(z^3))^2 - (z^2 - \frac{z^6}{6} + o(z^6))$$
$$= z^2 - \frac{z^4}{3} + \frac{z^6}{36} + \frac{z^6}{6} - z^2 + o(z^6) = -\frac{z^4}{3} + \frac{7z^6}{36} + o(z^6) \sim -\frac{z^4}{3}$$

Тогда при $z \to 0$ $\dfrac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} \sim -\dfrac{3}{z^2}$, и точка 0 является полюсом второго порядка.

Вычет в ней равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^4}{\sin^2 z - \sin z^2} \right].$$

Сперва найдя производную, а потом перейдя к пределу, получим требуемый результат.

Раскладывая функцию в ряд Лорана, то есть действуя по определению, мы получим его быстрее:

$$\frac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} = \frac{z^2}{-z^4/3 + 7z^6/36 + \ldots} = \frac{3}{-z^2 + 7z^4/(12) + \ldots}$$
$$= -\frac{1}{z^2}\frac{3}{1 - 7z^4/(12) + \ldots} = -\frac{3}{z^2}\left(1 + \frac{7z^4}{12} + \ldots\right) = -\frac{3}{z^2} + \ldots,$$

откуда видно, что $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^2}{\sin^2 z - \sin z^2} = 0$.

**Вычисление вычетов в точке $z_0 = \infty$.**

Бесконечно удаленная точка называется нулем фунции $f$, если $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Этот ноль имеет порядок $m$ ($m$ целое положительное), если

$$f(z) \sim \frac{A}{z^m}, \text{ где } A \text{ — ненулевая постоянная.}$$

Вычет в бесконечности гарантированно равен нулю, если бесконечность — ноль второго или выше порядка. В остальных случаях для подсчета вычета проще всего пользоваться определением.

**Примеры.**

1) $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{1}{1+z^2} = 0$, так как бесконечность — ноль второго порядка: при $z \to \infty$ $\dfrac{1}{1+z^2} \sim \dfrac{1}{z^2}$.

2) Найти $\operatorname*{res}_{z=\infty} ze^{1/(z-1)}$.

Разложим экспоненту в ряд Лорана в окрестности бесконечности:

$$e^{1/(z-1)} = 1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!(z-1)^2}+\ldots = 1+\frac{1}{z}\frac{1}{(1-1/z)}+\frac{1}{2z^2}\frac{1}{(1-1/z)^2}+\ldots =$$
$$1 + \frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z} + \ldots) + \frac{1}{2z^2}(1 + \frac{2}{z} + \ldots) + \ldots = 1 + \frac{1}{z} + \frac{3}{2z^2} + \ldots.$$

Тогда ряд для исходной функции следующий:

$$ze^{1/(z-1)} = z + 1 + \frac{3}{2z} + \ldots$$

Таким образом, искомый вычет равен $-3/2$.

# 7. Вычисление интегралов с помощью вычетов

## 7.1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Одним из важнейших применений теории вычетов является вычисление интегралов от однозначных функций по замкнутым кривым в предположении, что в некоторой области, содержащей контур интегрирования, не заключается других особых точек, кроме изолированных особых точек однозначного характера. При этом весьма полезной является

**Теорема 7.1.1 (Основная теорема о вычетах)** *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой замкнутой области $D$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, \dots z_n$, не лежащих на границе области $\Gamma = \partial D$ , то интеграл от функции $f(z)$ по контуру $\Gamma$ при обходе контура в положительном направлении (область остается слева) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов функции $f(z)$ в этих особых точках:*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

**Пример.** 1)Вычислить $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz$. Функция имеет 2 особые точки: 0 и $\infty$, внутрь положительно определенного контура попадает только 0. При разложении в ряд Лорана в окрестности нуля получаем

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \dots$$

следовательно, $\operatorname*{res}_{z=0} \sin\frac{1}{z} = 1$. Тогда, по интегральной теореме Коши, имеем $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$.

2) Вычислить $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{z^2+1}\,dz$.

Внутрь контура при положительной его ориентации попадает только особая точка $i$, вычет функции в ней $\operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} =$

$\operatorname*{res}_{z=i} \dfrac{1}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{1}{2i}$.

Тогда искомый интеграл равен $\pi$.

Следующая теорема также полезна при вычислении вычетов и интегралов:

**Теорема 7.1.2** *Если $f(z)$ имеет на комплексной плоскости конечное число особых точек $z_1, \ldots z_n$ , то сумма всех ее вычетов, включая вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

**Примеры использования:**

1) Вычислить $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{z^2+1}\, dz$.

Всего особых точек у функции три: $i,\ -i$ и $\infty$. Внутрь контура попадают первые две, так что искомый интеграл равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов в них. Но, по теореме 7.1.2, эта сумма равна $-\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{1}{z^2+1} = 0$ (см. пример на с. 75).

Значит, интеграл тоже равен нулю.

**Задачи:**

1. Вычислить интеграл

13.1 $$\oint\limits_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+1)}$$

13.2 $$\oint\limits_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$$

13.3 $$\oint\limits_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$$

13.4 $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}\, dz$$

13.5 $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z}$

13.6 $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z}\,dz$

13.7 $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3} \frac{ze^z}{\sin z}\,dz$

13.8 $\displaystyle\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{2z\,|z-1|}{\sin z}\,dz$

13.9 $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/4|=1/3} \frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}\,dz$

13.10 $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{iz(z-i)^2}{\sin \pi z}\,dz$

13.11 $\displaystyle\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}\,dz$

13.12 $\displaystyle\oint\limits_{|z-1/2|=1} \frac{e^z+1}{z(z-1)}\,dz$

13.13 $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}\,dz$

13.14 $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}\,dz$

13.15 $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=3/2} \frac{\ln(z+2)}{\sin z}\,dz$

13.16 $\displaystyle\oint\limits_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}\,dz$

13.17 $$\oint\limits_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^2 + \pi z}\, dz$$

13.18 $$\oint\limits_{|z+3/2|=1} \frac{\cos^3 z + 3}{2z^2 + \pi z}\, dz$$

13.19 $$\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 - 2\pi z}\, dz$$

13.20 $$\oint\limits_{|z|=1/4} \frac{\ln(e + z)}{z \sin z + \dfrac{\pi}{4}}\, dz$$

13.21 $$\oint\limits_{|z|=\pi/2} \frac{z^2 + z + 3}{\sin z(\pi + z)}\, dz$$

13.22 $$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - i}{\sin 2z(z - \pi)}\, dz$$

13.23 $$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z + \pi)}{\sin 2z}\, dz$$

13.24 $$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z}\, dz$$

13.25 $$\oint\limits_{|z-3/2|=1} \frac{z(z + \pi)}{\sin 3z(z - \pi)}\, dz$$

13.26 $$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{\sin z}{z(z - \pi)(z + \dfrac{\pi}{3})}\, dz$$

13.27 $$\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z}\, dz$$

13.28 $$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z}\, dz$$

13.29 $$\oint\limits_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}\, dz$$

13.30 $$\oint\limits_{|z-3/2|=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\dfrac{z}{2}(z-\pi)}\, dz$$

13.31 $$\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\dfrac{z}{3}}\, dz$$

2. Вычислить интеграл.

14.1.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3} dz.$$

14.2.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3} dz.$$

14.3.
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^{\frac{1}{z}}+1}{z} dz.$$

14.4.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz.$$

14.5.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2} dz.$$

14.6.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2} dz.$$

14.7.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz.$$

14.8.
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{1 - \sin\frac{1}{z}}{z} dz.$$

14.9.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz.$$

14.10.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{3 - 2z + 4z^4}{z^3} dz.$$

14.11.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz.$$

14.12.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz.$$

14.13.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^6} dz.$$

14.14.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz.$$

14.15.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$$

14.16.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$$

14.17.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz.$$

14.18.
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz.$$

14.19.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz.$$

14.20.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz.$$

14.21.
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz.$$

14.22.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz.$$

14.23.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$$

14.24.
$$\oint\limits_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$$

14.25.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^4+2z^2+3}{2z^6}dz.$$

14.26.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-1}{z^3}dz.$$

14.27.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{1-z^4+3z^6}{2z^3}dz.$$

14.28.
$$\oint\limits_{|z|=2} z^3\cos\frac{2i}{z}dz.$$

14.29.
$$\oint\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z-\sin z}{z^2}dz.$$

14.30.
$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{2z^3+3z^2-2}{2z^5}dz.$$

14.31.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2e^{\frac{1}{z^2}}-1}{z}dz.$$

3. Вычислить интеграл.

15.1.
$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-\operatorname{sh}^2\pi^2 z}dz.$$

15.2.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos 3z-1+\frac{9z^2}{2}}{z^4\operatorname{sh}\frac{9}{4}z}dz.$$

15.3.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz.$$

15.4.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - 1 + \frac{9z^2}{2}}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz.$$

15.5.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 4iz} dz.$$

15.6.
$$\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz.$$

15.7.
$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{8z} \operatorname{ch} 4z}{z \sin 4\pi z} dz.$$

15.8.
$$\oint\limits_{|z|=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz.$$

15.9.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z} dz.$$

15.10.
$$\oint\limits_{|z|=0,05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz.$$

15.11.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz.$$

15.12.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{4z}{3}} dz.$$

15.13.
$$\oint\limits_{|z|=6} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz.$$

15.14.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz.$$

15.15.
$$\oint\limits_{|z|=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{sh}^2 \pi z} dz.$$

15.16.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z} dz.$$

15.17.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 5z}{z \sin 2iz} dz.$$

15.18.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$$

15.19.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh}(-iz)} dz.$$

15.20.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 \operatorname{sh} 5z} dz.$$

15.21.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz.$$

15.22.
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz.$$

15.23.
$$\oint\limits_{|z|=5} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz.$$

15.24.
$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz.$$

15.25.
$$\oint\limits_{|z|=0,4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 2\pi z} dz.$$

15.26.
$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^2 \operatorname{sh} 8iz} dz.$$

15.27.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{5z} - \operatorname{ch} 6z}{z \sin \pi z} dz.$$

15.28.
$$\oint\limits_{|z|=0,2} \frac{\operatorname{ch} 2z - \cos 2z}{z^2 \sin 8z} dz.$$

15.29.
$$\oint\limits_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{\pi}{3}} dz.$$

15.30.
$$\oint\limits_{|z|=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz.$$

15.31.
$$\oint\limits_{|z|=0,5} \frac{e^{2z}-\cos 9z}{z \operatorname{sh} \pi i z} dz.$$

## Список рекомендуемой литературы

1. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т.1-2. М.: Наука, 1967-1968.

2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

3. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991.